UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 IMEA, Ingénierie stochastique, 2009-2010
Sylvain Rubenthaler
http ://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - mercredi 6 janvier 2010

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

Ex. 1 Les fonctions scilab suivantes sont définies pour tout l'exercice. Ces fonctions prennent en argument un réel x.

```
function [y]=g(x) ;
 z=0 ;
 if (x>0) then
  z=exp(-x) ;
 end,
 y=z ;
endfunction
function [y]=f(x) ;
 z=0 ;
 if (x<1) then
  if (x>0) then
   z=sqrt(1-x^2) ;
  end,
 end,
 y=z ;
endfunction
```

(a) Quelles sont les fonctions f, g définies par les lignes de programme ci-dessous ?

(b) Soit $C = 4e/\pi$. On admet que $f(x) \leq C \times g(x)$, $\forall x$. Quelle est la loi de la variable première coordonnée de a générée par la fonction suivante ?

```
function a=variable(t) ;
 C=4*exp(1)/(%pi) ; // c'est la variable C définie ci-dessus
 b=0 ;
 i=0 ;
 while (b==0)
 i=i+1 ;
  u=rand() ;
  y=-log(u) ; //rappel : on obtient ici y de loi exponentielle de paramètre
   1
  v=rand() ; //rappel : on obtient ici v de loi uniforme sur [0 ;1]
  if (v*C*g(y)<f(y)) then
   b=1 ;
  end,
 end,
 a=[y i] ;//vecteur ligne de première coordonnée y et de seconde coordonnée
   i
endfunction
```

Remarquons que la variable de sortie ne dépend pas de l'argument t.

(c) i. Quelle est la loi de `a(1,2)` générée par la procédure ci-dessus ? (On parle ici de la deuxième coordonnée.)(On demande de refaire une démonstration vue en cours.)

ii. Calculer son espérance.(On demande de refaire une démonstration vue en cours.)

(d) On se sert de la fonction `variable` définie ci-dessus.

```
s=0 ;
n=10000 ;
N=0 ;
for k=1 :n
 w=variable(1) ;
 z=w(1,1) ;
 r=w(1,2) ;  s=s+sin(z) ;
 N=N+r ;
end,
s=s/n ;
s // on affiche s
N // on affiche N
```

i. Quelle est la quantité approchée par `s` ? (On pourra laisser le résultat sous forme intégrale.)

ii. Calculer $\mathbb{P}(N = n + 1)$.

Ex. 2

```
n=10000 ;
s=0 ;
m=2 ;
for i=1 :n
 y=rand()*m ;
 s=s+cos(y) ;
end ;
s=s/n ;
s // on affiche s
```

Quelle est la quantité approchée par `s` ? (On demande une valeur exprimée à l'aide d'une fonction trigonométrique.)

Ex. 3 Soit (X_n) une chaîne de Markov dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de transition P dont les termes non-diagonaux sont donnés par

$$P = \begin{bmatrix} . & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & . & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & . & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & . \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer les termes diagonaux de la matrice P.

(b) Montrer que E est constitué de deux classes récurrentes et d'une classe transitoire (relativement à P).

(c) Trouver les probabilités invariantes de chaque classe récurrente puis l'ensembles des probabilités invariantes.