UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
M1 IMEA - Méthodes de Monte-Carlo
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Travaux pratiques (avec un exercice) numéro 2 : corrigé du 1.

On se donne $(X_i, Y_i, U_i, V_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. avec X_1, Y_1, U_1, V_1 indépendants, X_1 de loi de densité f, Y_1 de loi de densité g, $U, V \sim \mathcal{U}([0;1])$. Notons pour tout i, $A_i = \{U_i f(X_i) \leq g(X_i)\} \cup \{V_i g(X_i) \leq f(Y_i), U_i f(X_i) > g(X_i)\}$ (A_i est un événement) et $T(\omega) = \inf\{i : \omega \in A_i\}$.

Pour toute fonction $\phi \in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z)) &= \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{i=T}(\phi(Y_i)\mathbf{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbf{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbf{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)})\right) \\
&= \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{A_1^c}\dots\mathbf{1}_{A_{i-1}^c}\mathbf{1}_{A_i}(\phi(Y_i)\mathbf{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} \\
&\qquad + \phi(X_i)\mathbf{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbf{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)})\Big) \\
\text{(par indépendance)} &= \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_1^c)^{i-1}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_i}(\phi(Y_i)\mathbf{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbf{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbf{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)})\right) \\
&= \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_1^c)^{i-1}\mathbb{E}\left(\phi(Y_i)\mathbf{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbf{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbf{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)}\right).
\end{aligned}
$$

Calculons

$$
\mathbb{E}\left(\phi(Y_i)\mathbf{1}_{U_i g(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbf{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbf{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)}\right) =
$$
$$
\int_{x,y\in\mathbb{R}}\int_{u,v\in[0;1]} \left(\phi(y)\mathbf{1}_{uf(x)\leq g(x)} + \phi(x)\mathbf{1}_{vg(y)\leq f(y)}\mathbf{1}_{uf(x)>g(x)}\right) dudvdxdy
$$

On va utiliser les résultats suivants.

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a + b - a\wedge b = a \vee b$. (Rappel : $a \vee b = \max(a,b)$, $a\wedge b = \min(a,b)$.)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \mathbf{1}_{uf(x)\leq g(x)}dx = \frac{(f\wedge g)(x)}{f(x)}$, $\int_0^1 \mathbf{1}_{uf(x)>g(x)}dx = 1 - \frac{(f\wedge g)(x)}{f(x)}$

La quantité ci-dessus est alors égale à

$$\begin{aligned}
\int_{x,y\in\mathbb{R}} \phi(y)\frac{(g\wedge f)(x)}{f(x)}f(x)g(y)+\phi(x)\left(1-\frac{(g\wedge f)(x)}{f(x)}\right)\frac{(g\wedge f)(y)}{g(y)}f(x)g(y)dydx &= \\
\int_{x,y\in\mathbb{R}} \phi(y)(g\wedge f)(x)g(y)+\phi(x)\left(f(x)(g\wedge f)(y)-(g\wedge f)(x)(g\wedge f)(y)\right)dxdy &= \\
\int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)g(y)dy\times\int_{x\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(x)dx+\int_{x\in\mathbb{R}}\phi(x)f(x)dx\times\int_{y\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(y)dy & \\
-\int_{x\in\mathbb{R}}\phi(x)(g\wedge f)(x)dx\times\int_{y\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(y)dy &= \\
\int_{x\in\mathbb{R}}\phi(x)(f\vee g)(x)dx\times\int_{y\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(y)dy\,. &
\end{aligned}$$

En prenant ϕ constante égale à 1, on trouve

$$\mathbb{P}(A_1)=\int_{x\in\mathbb{R}}(f\vee g)(x)dx\times\int_{y\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(y)dy\,.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z)) &= \frac{\int_{x\in\mathbb{R}}\phi(x)(f\vee g)(x)dx\times\int_{y\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(y)dy}{1-\mathbb{P}(A_1^c)} \\
&= \frac{\int_{x\in\mathbb{R}}\phi(x)(f\vee g)(x)dx}{\int_{x\in\mathbb{R}}(f\vee g)(x)dx}\,.
\end{aligned}$$

Donc Z est de densité

$$x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{(f\wedge g)(x)}{\int_{y\in\mathbb{R}}(f\wedge g)(y)dy}\,.$$