L2 & L3 MASS
Université de Nice-Sophia Antipolis
Sylvain Rubenthaler

REMISE À NIVEAU, feuille n° 1 (exercices + corrigés)

1 Énoncés des exercices

1. Calculer l'équation de la tangente à la courbe $y = \dots$ aux points demandés.
   (a) $y = \frac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$,
   (b) $y = 2x^2 - 5x$, $(-1, 7)$,
   (c) $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$,
   (d) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$, $(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.
   (a) $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$,
   (b) $f(x) = x^4 - 5x$,
   (c) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$,
   (d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$,
   (e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$,
   (f) $f(x) = \sqrt{3x+1}$,
   (g) $f(x) = x\ln(x) - x$,
   (h) $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$,
   (i) $f(x) = (\cos(x))^2$.
3. Dessiner les graphes des fonctions suivantes.
   (a) $f(x, y) = 3$,
   (b) $f(x, y) = y$,
   (c) $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$,
   (d) $f(x, y) = \cos x$,
   (e) $f(x, y) = y^2 + 1$,
   (f) $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$,
   (g) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$,
   (h) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$,

(i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Prouver la convergence ou la non-convergence des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}$). Dans le cas convergence, trouver la limite.

   (a) $a_n = n(n-1)$
   (b) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$
   (c) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$
   (d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$
   (e) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$
   (f) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$
   (g) $a_n = \cos(2/n)$
   (h) $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$
   (i) $a_n = \arctan(2n)$
   (j) $a_n = \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}$
   (k) $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(2n)}$
   (l) $a_n = n^2 e^{-n}$
   (m) $a_n = \frac{\cos^2 n}{2^n}$
   (n) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
   (o) $a_n = n \sin(1/n)$
   (p) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n^2-1}$
   (q) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/n}$
   (r) $a_n = \frac{\sin(2n)}{1+\sqrt{n}}$
   (s) $a_n = \frac{n!}{2^n}$
   (t) $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$

5. Déterminer si les suites suivantes sont croissantes, décroissantes, non monotones, bornées ou pas ($n \in \mathbb{N}$).

   (a) $a_n = \frac{1}{5^n}$
   (b) $a_n = \frac{1}{2n+3}$
   (c) $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$
   (d) $a_n = \cos(n\pi/2)$
   (e) $a_n = ne^{-n}$
   (f) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$
   (g) $a_n = n + \frac{1}{n}$

6. Résoudre les systèmes suivants.

   (a) $$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 0 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

2 Corrigés

1.

(a) On calcule la dérivée :

$$\frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}\,.$$

La tangente en $(3,2)$ a donc pour équation

$$\begin{aligned} y &= 2+(-1)\times(x-3) \\ &= -x+5\,. \end{aligned}$$

(b) On calcule la dérivée :

$$4x-5\,.$$

La tangente en $(-1,3)$ a donc pour équation

$$\begin{aligned} y &= 7+(-9)\times(x-(-1)) \\ &= -9x-2\,. \end{aligned}$$

(c) On calcule la dérivée :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

La tangente en (1,1) a donc pour équation

$$\begin{aligned} y &= 1+(1/2)\times(x-1) \\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(d) On calcule la dérivée :

$$\frac{2(x+1)^2-2(x+1)\times 2x}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(-2x+2)}{(x+1)^4}\,.$$

La tangente en $(0,0)$ a donc pour équation

$$\begin{aligned} y &= 0+2\times(x-0) \\ &= 2x\,. \end{aligned}$$

2.

(a) $f'(x) = -2+8x$,

(b) $f'(x) = 4x^3-5$,

(c) $f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2}$,

(d) $f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$,

(e) $f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$,

(f) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$,

(g) $f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x)$,

(h) $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\sin x}{1+\tan^2 x} - \cos x \times \tan x\right) = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{1+\tan^2 x} - \cos^2 x\right)$,

(i) $f'(x) = 2(-\sin x)\cos x = -2\sin x \times \cos x$.

3. Les noms des axes ne sont pas indiqués dans les figures ci-dessous mais ils sont faciles à retrouver.

   (a) Le graphe est un plan horizontal.

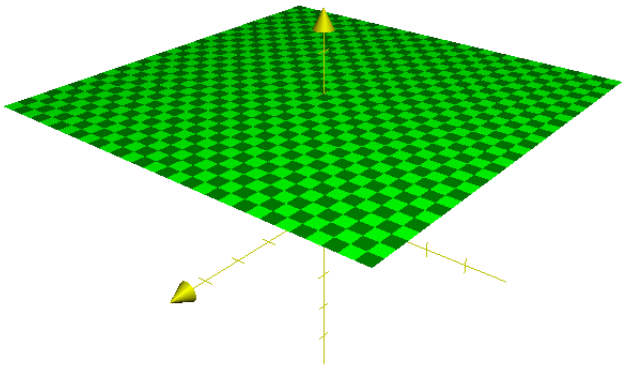

FIGURE 2.1 –

   (b) Le graphe est un plan incliné.

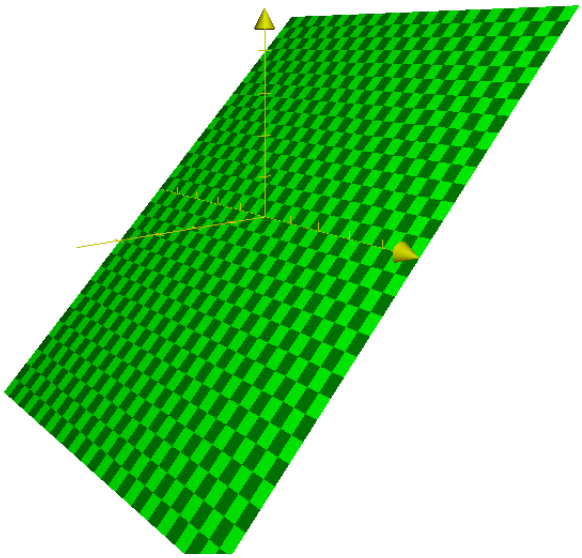

FIGURE 2.2 –

(c) Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -5\,.$$

Le graphe est un plan passant par $(0, 0, 10)$ et de vecteurs tangents $(1, 0, -4)$, $(0, 1, -5)$.

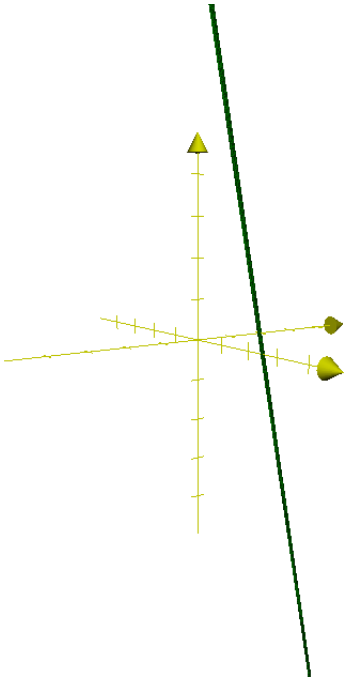

FIGURE 2.3 –

(d) La fonction est bornée (entre -1 et $+1$). La fonction ne dépend pas de y donc le graphe est invariant par translation sur y.

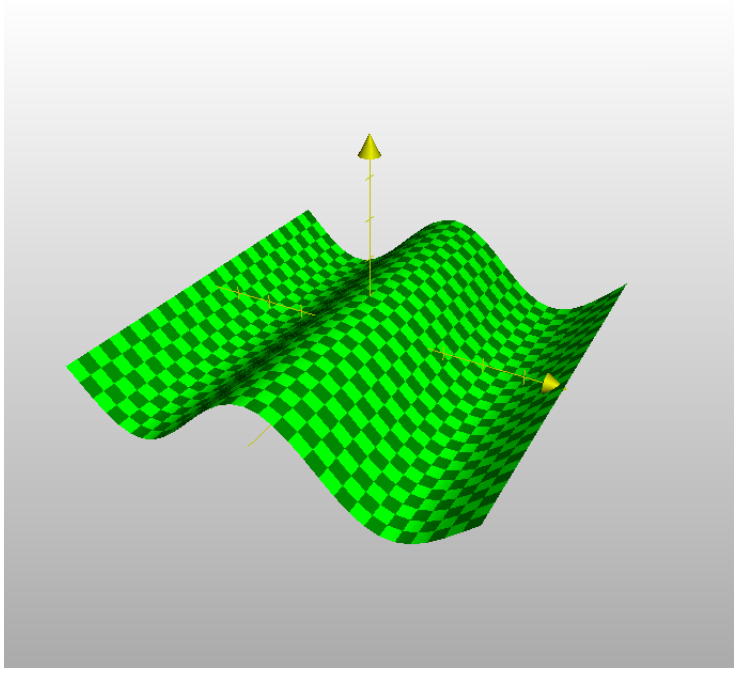

FIGURE 2.4 –

(e) La fonction ne dépend pas de x donc le graphe est invariant par translation sur x.

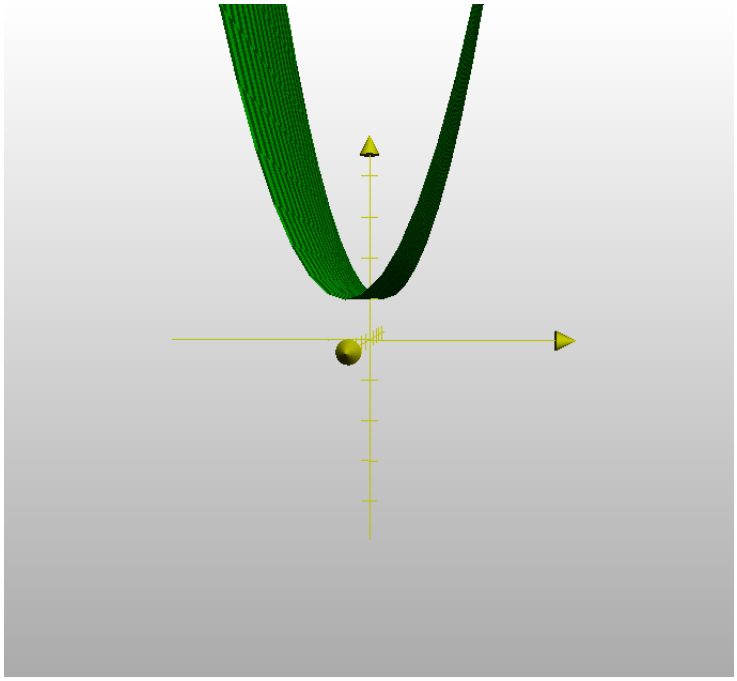

FIGURE 2.5 –

(f) Nous avons $f(x,y) \to -\infty$ si la norme $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$ (donc aux bords du dessin, la surface doit partir vers $-\infty$). Calculons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = -2y\,.$$

Cette fonction a donc un point critique [1] en $(0,0)$. Pour savoir si ce point est un extrema on regarde les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\,,$$

puis la matrice hessienne au point critique

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont < 0, on dit qu'elle est définie négative. Et donc le point critique $(0,0)$ est un maximum. C'est le seul maximum (il n'y a pas d'autre point critique) donc c'est le maximum absolu.

1. c'est à dire un point où les deux dérivées partielles s'annulent

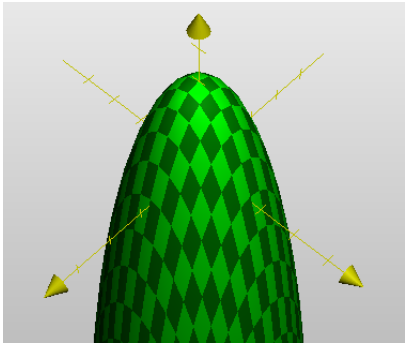

FIGURE 2.6 –

(g) Nous avons $f(x,y) \to +\infty$ si la norme $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$ (donc aux bords du dessin, la surface doit partir vers $+\infty$). Calculons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = 2y\,.$$

Cette fonction a donc un point critique en $(0,0)$. Pour savoir si ce point est un extrema on regarde les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\,,$$

puis la matrice hessienne au point critique

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont > 0, on dit qu'elle est définie positive. Et donc le point critique $(0,0)$ est un minimum. C'est le seul minimum (il n'y a pas d'autre point critique) donc c'est le minimum absolu.

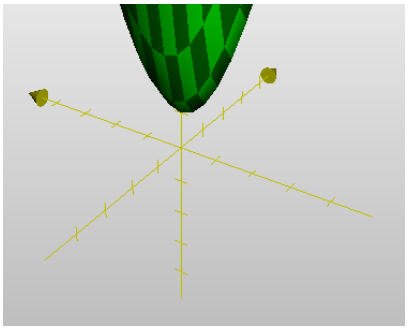

FIGURE 2.7 –

(h) Nous remarquons que cette fonction est définie seulement pour

$$\{(x,y) : x^2 + 16y^2 \leq 16\}\,,$$

c'est à dire dans un domaine de forme elliptique. Calculons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2-16y^2}}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = \frac{-16y}{\sqrt{16-x^2-16y^2}}\,.$$

Cette fonction a donc un point critique en $(0,0)$. Pour savoir si ce point est un extrema on regarde les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{16-x^2-16y^2}} - \frac{x^2}{(16-x^2-16y^2)^{3/2}}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-16}{\sqrt{16-x^2-16y^2}} - \frac{16\times 8y^2}{(16-x^2-16y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{16y\times x}{(16-x^2-16y^2)^{3/2}}\,,$$

puis la matrice hessienne au point critique

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont < 0, on dit qu'elle est définie négative. Et donc le point critique $(0,0)$ est un maximum. C'est le seul maximum (il n'y a pas d'autre point critique) donc c'est le maximum absolu.

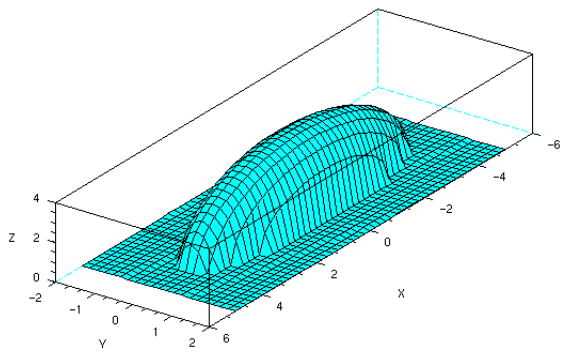

FIGURE 2.8 –

(i) Remarquons que $f(x,y)$ est la distance à l'origine du point $(x,y,0)$ ($\forall(x,y)$). Le graphe est invariant par rotation autour de l'axe des z. C'est un cône.

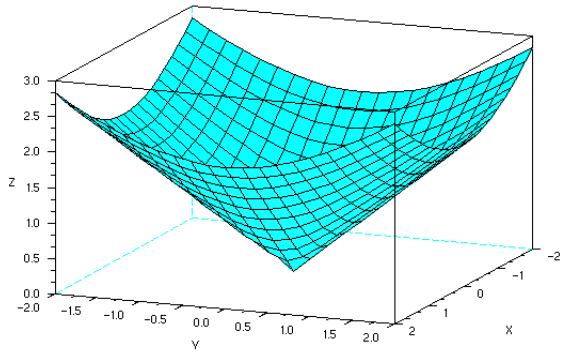

FIGURE 2.9 –

4.

(a) La suite $a_n = n^2 - n$ est un polynôme de degré 2 de terme dominant > 0 donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) La suite a_n est une fraction rationnelle en n. Les polynômes au numérateur et au dénominateur ont même degré donc la limite est le quotient des termes dominants, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

(c) De même : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5$.

(d) Nous avons $a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(e) Nous avons $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $0 < 2/3 < 1$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(f) Comme en 4b, $\frac{n^3}{n^3+2n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc a_n n'a pas de limite quand $n \to +\infty$.

(g) Nous avons $\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la fonction cos est continue donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$.

(h) Nous avons $a_n = \frac{1}{(2n)(2n+1)}$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(i) Nous avons $2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = 1$ (se voit facilement sur un dessin) donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(j) Nous avons $a_n = \frac{e^{-n}+e^{-3n}}{1-e^{-2n}}$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(k) Nous avons $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(2)+\ln(n)} = \frac{1}{\frac{\ln(2)}{\ln(n)}+1}$ (et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(l) Nous avons $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. L'exponentielle est plus forte que les polynômes donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(m) La suite $\cos^2 n$ est bornée et $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(n) Nous avons $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. La suite $1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

(o) Nous avons $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ [2]donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(p) Nous avons $a_n = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(q) Nous écrivons la forme exponentielle : $a_n = \exp\left(\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$. Nous avons $\log(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ [3] et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc$\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\times\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(r) La suite $1+\sin(2n)$ est bornée et $1+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(s) Nous avons $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La factorielle est plus forte que la puissance donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(t) Nous avons $|a_n| \leq \frac{3^n}{n!}$ donc, comme ci-dessus, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.

(a) Cette suite est décroissante et bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$).

(b) Idem (avec $0 < a_n \leq 1/3$).

(c) Calculons la dérivée de $x \geq 0 \mapsto f(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$. Nous avons

$$f'(x) = \frac{2(3x+4)-3(2x-3)}{(3x+4)^2} = \frac{17}{(3x+4)^2} \geq 0\,,\ \forall x \geq 0\,.$$

Donc (a_n) est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq \frac{2n}{2n} = 1$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+4} = \cos((n+4)\pi/2) = \cos(n\pi/2 + 2\pi) = a_n$. Donc cette suite est 4−périodique. Calculons les premiers termes : $a_0 = 1$, $a_1 = \cos(\pi/2) = 0$, $a_2 = \cos(\pi) = -1$, $a_2 = \cos(3\pi/2) = 0$, $a_3 = a_0 = 1$, ... Donc cette suite n'est pas monotone. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq a_n \leq 1$, la suite est bornée.

(e) Nous avons $a_0 = 0$, $a_1 = e^{-1}$, $a_2 = 2e^{-2} = e^{-1}\times\frac{2}{e} < e^{-1}$ (car $e > 2$). Donc la suite n'est pas monotone. On s'intéresse à la fonction $x \geq 0 \mapsto f(x) = xe^{-x}$. Nous avons

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}\,.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Table 1 – Tableau de variation

Le tableau de variation nous dit que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f(x) \leq e^{-1}$. Donc la suite est bornée.

2. Rappel. Pour deux suites (u_n), (v_n), on dit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (on dit que u_n et v_n sont équivalentes en $+\infty$ ou encore que u_n est un équivalent de v_n en $+\infty$, et inversement). Pour des fonctions f, g, on dit que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$ (on dit que f et g sont équivalentes en 0 ou encore que g est un équivalent de f en 0, et inversement). L'équivalent de sin en 0 est à connaître par cœur. Les règles de calcul sont les suivantes : si $u_n \sim v_n$, alors $u_n w_n \sim v_n w_n$ (pour toute suite (w_n)), et $1/u_n \sim 1/v_n$ (et pareil pour les équivalents de fonctions).

3. Encore un équivalent à connaître par cœur.

(f) Écrivons les premiers termes : $a_0 = 0$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 2/5$. On voit que la suite n'est pas monotone. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq \frac{n}{n} = 1$ (car $n^2 + 1 \geq n$). Donc la suite est bornée.

(g) La suite n'est pas définie pour $n = 0$. Étudions la fonction $x \geq 1 \mapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$. Nous avons

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0\,,\ \forall x \geq 1\,.$$

Donc la suite est croissante.

6.

(a) On calcule une suite de systèmes équivalents.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & + & w & = & 0 \\ & & & z + & 2w & = & 4 \\ & & & 2z + & w & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & + & w & = & 0 \\ & & & z + & 2w & = & 4 \\ & & & - & 3w & = & -3\,. \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\{(-1, -1, 2, 1)\}$.