L2 - Méthodes numériques
Université de Nice-Sophia Antipolis
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

TP n$^{\mathbf{o}}$ 6

On s'intéresse à la trajectoire d'un projectile dans le champ de gravité terrestre, en prenant en compte les frottements. Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}(t) &= -\alpha\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2}(t) &= -g-\alpha\frac{\partial y}{\partial t}, \end{cases}$$

(α est le coefficient de frottement et g est l'accélération du champ de gravité terrestre, on prendra $\alpha = 3$, $g = 9.80665$). On suppose : $x(0) = y(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) \geq 0$, $\frac{dy}{dt}(0) \geq 0$.

1. Écrire une fonction qui prend en argument $\frac{dx}{dt}(0)$, $\frac{dy}{dt}(0)$ et qui renvoie $x(t_0)$ où $t_0 = \inf\{t > 0, y(t) = 0\}$ (on demande un résultat approximatif, on pourra utiliser un schéma d'Euler) et qui trace la trajectoire entre 0 et t_0.
2. On suppose maintenant que l'on part avec $\frac{dx}{dt}(0)^2 + \frac{dy}{\partial t}(0)^2 = 10$ (la norme du vecteur vitesse en 0 est fixée). Écrire un programme qui trouve une angle de $x(t_0) = 0,222$.

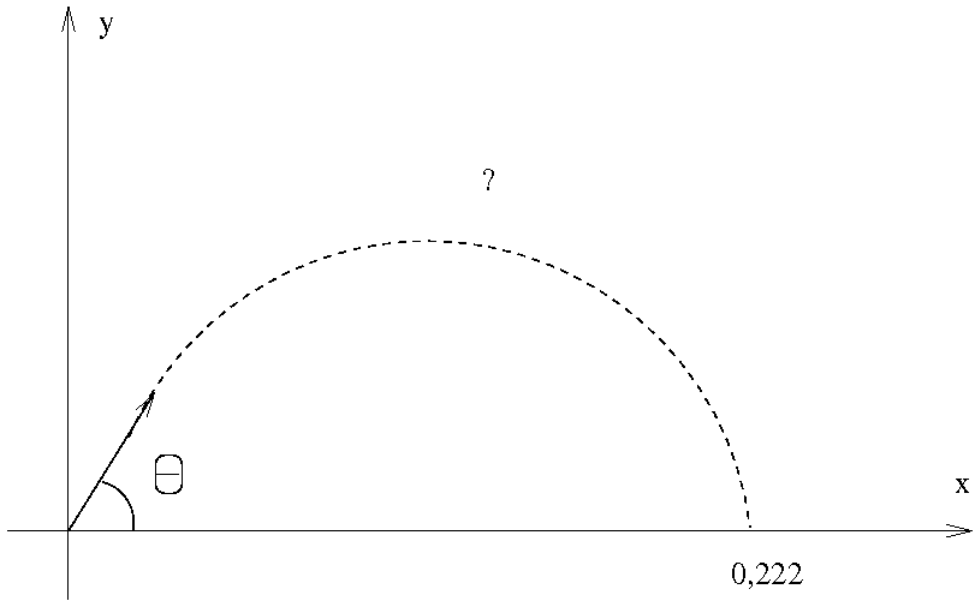


Figure 0.1 – trajectoire

Corrigé du TP n°6

1. Si on discrétise avec un pas δ, on obtient $\forall t$: $x(t+\delta) = x(t) + \delta x'(t) + o(\delta)$, $y(t+\delta) = y(t) + \delta y'(t)$, x

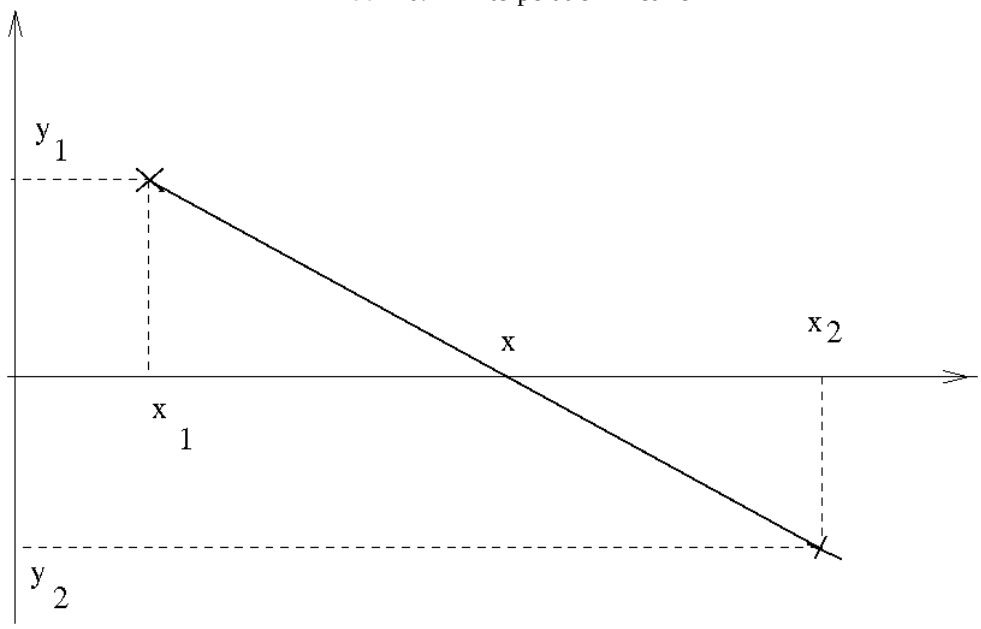
$$\begin{aligned} x(t+\delta) &= x(t) + \delta x'(t) + o(\delta) \\ y(t+\delta) &= y(t) + \delta y'(t) + o(\delta) \\ x'(t+\delta) &= x'(t) + \delta \times (-\alpha x'(t)) + o(\delta) \\ y'(t+\delta) &= y'(t) + \delta \times (-\alpha y'(t) - g) + o(\delta)\,. \end{aligned}$$

Donc une approximation raisonnable avec un pas de discrétisation δ est la suivante (v_1, v_2 les valeurs que l'on voudra) :

$$\begin{gathered} x(0) = 0\,,\ y(0) = 0\,, \\ x'(0) = v_1\,,\ y'(0) = v_2\,, \\ x((i+1)\delta) = x(i\delta) + \delta x'(i\delta)\,,\ y((i+1)\delta) = y(i\delta) + \delta y'(i\delta)\,, \\ x'((i+1)\delta) = x'(i\delta) + \delta \times (-\alpha x'(i\delta))\,,\ y'((i+1)\delta) = y'(i\delta) + \delta \times (-\alpha y'(i\delta) - g) \end{gathered}$$

(c'est le schéma d'Euler). ppelons (x_1, y_1), (x_2, y_2) les deux derniers points de la trajectoire (pour $\theta \in]0; \pi/2[$, nous avons $y_1 > 0$, $y_2 < 0$). On obtient une approximation de l'endroit où la trajectoire coupe l'axe des abscisses par interpolation.

FIGURE 0.2 – Interpolation linéaire



D'où la formule : $x = x_1 - \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$.

Algorithme 1 Dessin d'une trajectoire

```
//constantes du probleme0
a=3;//alpha
g=9.80665;
dt=0.005; //pas de discretisation
function [z]=cible(v1,v2)
 tab=[ 0 0];//tableau de la trajectoire
 x=0; y=0;
 xp=v1; yp=v2;
 b=0;
 while (b==0)
  x=x+dt*xp; y=y+dt*yp;
  xp=xp-a*xp*dt; yp=yp-(g+a*yp)*dt;
  if (y<0) then
   b=1;
      end //on s'arrête dès que le projectile retombe à l'altitude 0
  tab=[tab; [x y]];
 end,
 clf();
 m=max(tab(:,1));
 plot([-m/10 m*1.1],[0 0]);
 plot(tab(:,1),tab(:,2),'r');
 s=size(tab); //renvoie les dimension de tab dans un vecteur
 z=tab(s(1)-1,1)-tab(s(1)-1,2)*(tab(s(1),1)-tab(s(1)-1,1))/(tab(s(1),2)-tab(s(1)-1,2));
endfunction
cible(1.5,1);
```

2. Soit $f(\theta)$ la distance parcourue jusqu'à ce que le projectile retombe à l'altitude 0. Pour calculer la trajectoire avec un θ fixé, il suffit de taper :

$$\texttt{cible}(\texttt{sqrt}(10) * \texttt{cos}(\texttt{theta}), \texttt{sqrt}(10) * \texttt{sin}(\texttt{theta}))$$

(theta=θ). A Notons $F : \theta \mapsto$ce point x. On cherche θ tel que $F(\theta) = 0,222$. Posons $l = 0,222$. Cela revient à chercher un point fixe de $\theta \mapsto F(\theta) - l + \theta$. L'algorithme suivant utilise la fonction précédente.

Algorithme 2 Méthode de point fixe

```
n=10;
theta=%pi/4;
for k=1:n
  theta=cible(sqrt(10)*cos(theta),sqrt(10)*sin(theta))-l+theta;
end
disp(theta);
```