L2 - Méthodes numériques
Université de Nice-Sophia Antipolis
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

TP no. 2

1. Dans les questions suivantes, on suppose que la suite (x_n) est définie par $g(x_n) = x_{n+1}$. On suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$ un point fixe de g. On demande de calculer l'ordre de convergence p dans les cas suivants :
   (a) $g(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, $\overline{x} = 1/3$,
   (b) $g(x) = x^2$, $\overline{x} = 0$,
   (c) $g(x) = \cos(x) - 1$, $\overline{x} = 0$,
   (d) $g(x) = x^3$, $\overline{x} = 0$.
2. Trouver la racine $\overline{x}$ de $x \mapsto \cos(x) - \sin^2(x)$ qui se trouve dans $[0;\pi]$ en utilisant la méthode de Newton. Donc $p = 1$.

Corrigé du TP no. 2

1.

   (a) Pour tout n, $\frac{|g(x_n)-g(1)|}{|x_n-1|} = \frac{1}{2}$. Donc l'ordre p est ≥ 1. Pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{|g(x_n)-g(1)|}{|x_n-1|^{1+\epsilon}} = \frac{1}{2|x_n-1|^{\epsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $p = 1$.

   (b) Pour tout n, $\frac{|g(x_n)-g(0)|}{|x_n-0|^2} = 1$, donc $p \geq 2$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{|g(x_n)-g(0)|}{|x_n-0|^{2+\epsilon}} = \frac{1}{|x_n-0|^{\epsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $p = 2$.

   (c) Pour tout n, $\frac{|g(x_n)-g(0)|}{|x_n-0|^2} = \frac{\left(\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)\right)}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc $p \geq 2$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{|g(x_n)-g(0)|}{|x_n-0|^{2+\epsilon}} = \frac{\left(\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)\right)}{x_n^{2+\epsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $p = 2$.

   (d) Pour tout n, $\frac{|g(x_n)-g(0)|}{|x_n-0|^3} = 1$, donc $p \geq 3$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{|g(x_n)-g(0)|}{|x_n-0|^{3+\epsilon}} = \frac{1}{|x_n-0|^{\epsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $p = 3$.

2.

Algorithm 1 Méthode de Newton

```
n=30;
function [z]=fon(x)
  z=(cos(x)-sin(x)*sin(x))/(-sin(x)-2*cos(x)*sin(x));
endfunction
x=0.5;
for k=1:n
  x=x-fon(x);
end
disp(x);
clf();
t=[0:0.1:2];
plot(t,cos(t)-sin(t).*sin(t),t,0);
// pour tracer un graphe, on remplit un vecteur t avec les abscisses, le vecteur
cos(t)-sin(t).*sin(t) a la meme taille que t et contient, pour chaque composante
y de t : cos(y)-sin(y)*sin(y)
```