Université de Nice - M1 IMEA - Méthodes de Monte-Carlo
http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

FEUILLE 2

Exercise 1. Soient f et g ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) des densités. Soit h la fonction :

$$h(x) = \frac{\sup(f(x), g(x))}{\int_{\mathbb{R}} \sup(f(t), g(t))dt} .$$

(1) On simule une v.a. Z suivant une méthode d' acceptation/rejet. On tire X, Y indépendantes respectivement de lois de densité f, g et U, V indépendantes uniformes sur $[0, 1]$ (et indépendantes de X, Y) jusqu'à ce que
- $Uf(X) \leq g(X)$, auquel cas on prend $Z = Y$
- ou $Vg(Y) \leq f(Y)$ et $Uf(X) > g(X)$, auquel cas on prend $Z = X$.

Montrer que Z est de loi de densité h.

(2) On suppose ici que f densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et g densité de la loi $\mathcal{N}(3/2, 1)$.
   (a) Écrire un programme qui simule des variables aléatoires suivant h.
   (b) Écrire un programme qui dessine un histogramme empirique de h.

Exercise 2. On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(p + 1, 1)$, p entier, est

$$f_p(x) = \frac{1}{p!} x^p \exp(-x) \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On rappelle également que la loi $\Gamma(p + 1, 1)$ est la loi de la somme de $p + 1$ variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

(1) Soit $(X_p)_{p\geq 1}$ une suite de v.a. telles que X_p suive la loi $\Gamma(p + 1, 1)$, $p \geq 1$. Montrer que

$$Y_p = \frac{X_p - p}{\sqrt{p}} \underset{\text{loi}}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0, 1),$$

lorsque p tend vers l'infini.

(2) Etant donné un réel x, et p assez grand tel que $p + x\sqrt{p} > 0$, montrer que la densité g_p de Y_p s'écrit au point x :

$$g_p(x) = \frac{p^p \exp(-p)\sqrt{2\pi p}}{p!} r_p(x),$$

où $r_p(x) \to (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ lorsque p tend vers l'infini.

(3) En déduire la formule de Stirling :

$$p! \sim_{p\to\infty} \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p.$$

Exercise 3. En appliquant le TCL à une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\exp(-n) \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}.$$