UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2011-2012
Sylvain Rubenthaler
http ://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

# TD n$^{\text{o}}$ 7

Soit $N \in \mathbb{N}$, $E = \{1, 2, \ldots, N\} \times \{1, 2, \ldots, N\}$. Soit $p \in [0; 1]$. On se donne $(H_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N-1}$, $(V_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N-1}$ des variables aléatoires uniformes i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. Soit $G$ le graphe aléatoire dont les sommets sont les éléments de $E$ et dont les arêtes forment l'ensemble

$$\{\{(i,j),(i+1,j)\} \text{ pour } i,j \text{ tels que } H_{i,j} = 1, 1 \leq i,j \leq N-1\} \\ \cup \{\{(i,j),(i,j+1)\} \text{ pour } i,j \text{ tels que } V_{i,j} = 1, 1 \leq i,j \leq N-1\}.$$

(Rappel sur les graphes : $G$ s'écrit $G = E \times A$ avec $A$ l'ensemble des arêtes (un sous-ensemble de l'ensemble des couples non ordonnés d'éléments de $E$.) En d'autres termes, $E$ est les point d'un quadrillage inscrit dans un carré de côté $N$ et deux points adjacents sont reliés par une arête avec probabilité $p$.

1. Faire un dessin d'une réalisation de $G$ pour $N = 20$ et $p = 1/2$ (vous pouvez faire varier ces constantes). On fixe une réalisation de $G$ pour toute la suite.
2. On s'intéresse au noyau de transition $P$ suivant sur $E$ : si $x$ in $E$, on pose $n_x = \#\{y \in E, xy \in A\}$, $P_{xx} = 1 - n_x/4$, et $P_{xy} = 1/4$ pour les $y$ tels que $xy \in A$. Écrire un programme qui simule la chaîne de Markov de loi initiale la loi uniforme sur $E$ et de transition $P$ (et tracer sa trajectoire).
3. On s'intéresse maintenant à la chaîne de Markov suivante dans $E^{(N \times N)}$. On pose pour $1 \leq i,j \leq N$, $X_0^{(i,j)} = (i,j)$. Décrivons maintenant la transition (de l'instant $n$ à l'instant $n+1$) :si $X_n^{(i,j)} = (k,l)$, on tire $(I,J)$ dans $E$ de loi $P_{(k,l),\cdot}$ (c'est à dire que l'on simule une transition avec la transition $P$) puis on pose $X_{n+1}^{(i,j)} = (I,J)$. Écrire un programme qui simule cette chaîne de Markov.
4. Se servir de la question précédente pour dessiner les sous-ensembles connexes de sommets de $G$ (on pourra les colorier avec des couleurs différentes). On demande de tracer ces sous-ensemble de manière approximative en se basant sur le fait qu'une chaîne de point de départ $x$ et de transition $P$ visite toute la classe de $x$ si on attend assez longtemps.