UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
MASTER 1 IMEA, MÉTHODES DE MONTE-CARLO, 2011-2012
SYLVAIN RUBENTHALER
http ://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

TD n° 8

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une chaîne de Markov à espace d'états $E = \{0,1\}$, de matrice de transition P et d'état initial 0.

1. Pour $r \leq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r$, montrer que
$$\mathbb{P}\{X_1 = 1, \ldots, X_{t_1-1} = 1, X_{t_1} = 0, X_{t_1+1} = 1, \ldots, X_{t_2-1} = 1, X_{t_2} = 0, \ldots\}$$
$$= \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}\{X_1 = 1, \ldots, X_{t_k - t_{k-1}-1} = 1, X_{t_k - t_{k-1}} = 0\}.$$
2. Soit $V_0 = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n=0\}}$ le nombre de fois que la chaîne visite 0. Montrer que
$$\forall r \geq 1, \quad \mathbb{P}\{V_0 > r\} = \big(\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\{X_1 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 0\}\big)^r.$$
3. En déduire que $\mathbb{P}\{V_0 = +\infty\} \in \{0,1\}$. Montrer également que
$$\mathbb{E}(V_0) = (1 - \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{X_1 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 0\})^{-1} \quad (1/0 = +\infty).$$
4. Montrer que $\mathbb{E}(V_0) = \sum_{n\geq 0} (P^n)_{0,0}$, puis que
$$\mathbb{P}\{V_0 = +\infty\} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} (P^n)_{0,0} = +\infty.$$
(Le cas échéant, l'état 0 est dit récurrent.)

Exercice 2 *On admet que le résultat de l'exercice précédent demeure vrai pour E de cardinal fini quelconque.*
Pour une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition P sur un espace d'états fini E, on cherche à montrer qu'un état appartenant à une classe de communication $\mathcal{C}$ fermée est nécessairement récurrent.

1. Montrer que, pour tout $i, j \in \mathcal{C}$,
$$\sum_{j\in\mathcal{C}} \sum_{n\geq 0} (P^n)_{i,j} = +\infty.$$
2. Soit $i \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $j \in \mathcal{C}$ tel que $\sum_{n\geq 0} (P^n)_{i,j} = +\infty$.
3. En déduire que, pour tout $i \in \mathcal{C}$, $\sum_{n\geq 0} (P^n)_{i,i} = +\infty$.
4. Conclure.

Exercice 3 *Nous étudions maintenant la réciproque de l'exercice précédent.*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états fini E, de matrice de transition P et d'état initial i supposé récurrent. Soit par ailleurs j un point accessible depuis i, i.e. $\exists m \geq 0,\ (P^m)_{i,j} > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\big(\bigcup_{k\geq m+1} \{X_k = i\}\big) = 1$.
2. En déduire que $\sum_{k\geq m+1} \mathbb{P}\{X_m = j, X_k = i\} > 0$.
3. Conclure