M1 IMEA - Méthodes de Monte-Carlo
Université de Nice-Sophia Antipolis
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Devoir n^{o} 3

(à rendre pour le 9 mai, une partie sur papier, une partie sous forme informatique à envoyer par courriel avec le nom : VotreNom-devoir-03-m1.sce, objet du courriel : devoir 03 m1)

On s'intéresse à la marche aléatoire d'un robot aspirateur dans une pièce modélisée par un échiquier (8×8 cases). Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la suite des positions de l'aspirateur. On pose $X_0=$ le coin en haut à gauche. Sachant X_n, nous avons :

- $X_{n+1}=$ une des cases adjacentes à X_n (avec probabilité 1/4 pour chaque case voisine) si X_n n'est pas au bord de l'échiquier
- X_{n+1} =une des cases adjacentes à X_n (avec probabilité 1/4 pour chaque case voisine) ou X_n (avec probabilité 1/2) si X_n est dans un coin
- X_{n+1} =une des cases adjacentes à X_n (avec probabilité 1/4 pour chaque case voisine) ou X_n (avec probabilité 1/4) dans les cas qui restent.

Ces règles de déplacement sont résumées dans le dessin suivant :

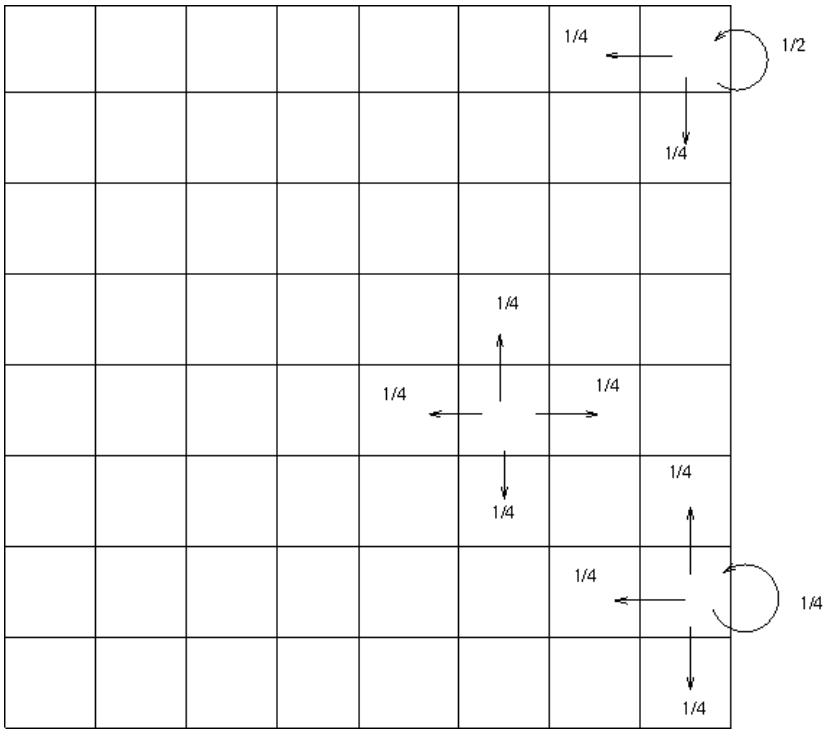

Figure 0.1 – Règles de déplacement

1. Montrer que cette chaîne est irréductible.
2. Montrer que cette chaîne vérifie la condition (D) du cours. En déduire que la loi de (X_n) converge vers une probabilité π (qui est l'unique probabilité invariante pour la transition de la chaîne).
3. Quelle est π ?

4. Écrire une fonction qui prend en argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie un dessin de la mesure de (X_n) (à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo). Faire un dessin pour un n tel que la loi de (X_n) est loin de π et pour un n tel que la loi de (X_n) est proche de π.