UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2011-2012
Sylvain Rubenthaler
http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen
Durée : 3h.

1. (a) Calculons pour une fonction test f :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)\mathbf{1}_{2Y>(1-X)^2}) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^2} f(x)\mathbf{1}_{2y>(1-x)^2}e^{-x}e^{-y}dxdy \\
&= \int_{x\geq 0} f(x)e^{-x}\left(\int_{y\geq(1-x)^2/2} e^{-y}dy\right)dx \\
&= \int_{x\geq 0} f(x)e^{-x}\exp(-\frac{(1-x)^2}{2})dx.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(2Y>(1-X)^2) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^2} \mathbf{1}_{2y>(1-x)^2}e^{-x}e^{-y}dxdy \\
&= \int_{x\geq 0} e^{-x}\exp(-\frac{(1-x)^2}{2})dx \\
&= \int_{x\geq 0} \exp\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{e^{-1/2}}{2}\int_{x\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{e^{-1/2}}{2}\sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

Donc (pour toute fonction test f)

$$\mathbb{E}(f(X)|2Y>(1-X)^2) = \int_{x\geq 0} f(x)e^{-x^2/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}dx$$

donc la loi cherchée est de densité

$$x \mapsto \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x^2/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

(b) Calculons pour une fonction test f :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f((2S-1)X|2Y>(1-X)^2) &= \mathbb{E}(f(X)\mathbf{1}_{S=1}|2Y>(1-X)^2)+\mathbb{E}(f(-X)\mathbf{1}_{S=0}|2Y>(1-X)^2) \\
&= \mathbb{E}(f(X)|2Y>(1-X)^2, S=1)\mathbb{P}(S=1) \\
&\quad +\mathbb{E}(f(-X)|2Y>(1-X)^2, S=0)\mathbb{P}(S=0) \\
&= \mathbb{E}(f(X)|2Y>(1-X)^2)\frac{1}{2}+\mathbb{E}(f(-X)|2Y>(1-X)^2)\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{x\geq 0} f(x)e^{-x^2/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}dx+\frac{1}{2}\int_{x\geq 0} f(-x)e^{-x^2/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}dx \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx.
\end{aligned}$$

Algorithme 1

```
b=0;
while (b==0)
   x=-log(rand());
   y=-log(rand());
   if (2*y>(1-x)^2) then
    b=1;
  end
end
s=grand(1,1,'bin',1,0.5);
z=(2*s-1)*x;
disp(z);
```

(c)

2. (a) On fait un dessin et on trouve que $\{1,2,3\}$ est une classe récurrente et $\{4,5\}$ est une classe transiente.

   (b) On résoud le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_1 & +\frac{1}{3}\pi_2 & & +\frac{1}{2} & \pi_5 & = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 & +\frac{1}{3}\pi_2 & +\frac{2}{3}\pi_3 & & & = \pi_2 \\ & \frac{1}{3}\pi_2 & +\frac{1}{2}\pi_3 & & & = \pi_3 \\ & & & \frac{1}{2}\pi_4 & +\frac{1}{2}\pi_5 & = \pi_4 \\ & & & \frac{1}{2}\pi_4 & & = \pi_5 \end{cases}$$

   sous la contrainte $\pi_1, \dots, \pi_5 \geq 0$, $\pi_1 + \cdots + \pi_5 = 1$ et on trouve

$$\pi_1 = \frac{4}{13}\,,\ \pi_2 = \frac{6}{13}\,,\ \pi_3 = \frac{3}{13}\,,\ \pi_4 = \pi_5 = 0.$$

   (c) Nous avons pour tout $n \geq 1$, $(P^n)_{1,1} \geq (P_{1,1})^n > 0$ donc 1 est apériodique donc la classe $\{1,2,3\}$ est apériodique.

   (d)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_5(X_{T+n} = 1) &= \mathbb{P}_5(X_{T+n} = 1 | T < \infty, X_T = 3)\mathbb{P}(T < \infty, X_T = 3) \\ &= \mathbb{P}_5(X_{T+n} = 1 | T < \infty, X_T = 3)\mathbb{P}(T < \infty) \\ \text{(car } \{1,2,3\} \text{ est récurrente)} &= \mathbb{P}_5(X_{T+n} = 1 | T < \infty, X_T = 3) \\ \text{(Markov fort)} &= \mathbb{P}_3(X_n = 1) \\ \text{(car } \{1,2,3\} \text{ est récurrente et apériodique)} &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_1. \end{aligned}$$

   (e) Par théorème du cours : $\mathbb{E}_3(T) = 1/\pi_3 = 13/3$.

3. Calculons pour une fonction test f (on note X la variable aléatoire affichée et U la variable u) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \mathbb{E}(f(\tan((U - \frac{1}{2})\pi))) \\ &= \int_0^1 f(\tan((v - \frac{1}{2})\pi))dv \\ (y = \tan((v - \frac{1}{2})\pi)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\pi(1+y^2)}dy. \end{aligned}$$

   Donc la variable affichée est de densité

$$y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

4. Notons $U_1, U_2, \dots$ (resp. $V_1, V_2, \dots$) les variables u (resp. `v`) tirées lors de la boucle `while`. Soit $T = \inf\{n \geq 1, V_n \leq U_n\}$. La variable affichée est U_T. On peut reconnaître un algorithme d'échantillonage d'importance ou calculer directement, pour toute fonction test f :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U_T)) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(f(U_n)\mathbf{1}_{T=n}) \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(f(U_n)\mathbf{1}_{V_1\geq U_1} \dots \mathbf{1}_{V_{n-1}\geq U_{n-1}}\mathbf{1}_{V_n<U_n}) \\
\text{(par indépendance)} &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(f(U_n)\mathbf{1}_{V_n<U_n})(\mathbb{P}(V_i \geq U_i))^{n-1}.
\end{aligned}$$

Calculons (pour tout n)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U_n)\mathbf{1}_{V_n<U_n}) &= \int_{u\in[0;1]}\int_{v\in[0;1]} f(u)\mathbf{1}_{v<u}dudv \\
&= \int_{u\in[0;1]} f(u)\left(\int_{v\in[0;u]} dv\right)du \\
&= \int_{u\in[0;1]} f(u)udu,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V \geq U) &= \int_{u\in[0;1]}\int_{v\in[0;1]} \mathbf{1}_{v\geq u}dudv \\
&= \int_{u\in[0;1]} (1-u)du = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U_T)) &= \sum_{n\geq 1}\left(\int_{u\in[0;1]} f(u)udu\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \int_{u\in[0;1]} f(u)2udu.
\end{aligned}$$

Donc la densité cherchée est

$$u \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{[0;1]}(u) \times 2u.$$