Université de Nice-Sophia Antipolis
L3 MIAGE - Processus stochastiques et analyse de données
Sylvain Rubenthaler `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Exemples de raisonnements

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits.

1. Calculons : $\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \leq 1,3\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{2\times\sqrt{n}} \leq \frac{0,3}{2}\times 5\right) \approx \mathbb{P}(Z \leq 0,75)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ (par le TCL). On lit sur la table que la probabilité cherchée est $0,7734$.
2. $\mathbb{E}(U_1^2) = \int_1^3 \frac{u^2}{2}du = [\frac{u^3}{6}]_1^3 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$. Par la loi des grands nombres, la limite cherchée est $\frac{13}{3}$.
3. $\mathbb{E}(U_1) = \int_0^1 udu = [\frac{u^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$. D'après le cours : $\mathbb{E}(U_1+\cdots+U_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(U_1) = \frac{3}{2}$.
4. Calculons : $\mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{X \text{ est pair}\}) = \mathbb{P}(X=2)$ car $\{X=2\}\subset\{X \text{ pair}\}$, $\mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \mathbb{P}(\{X=2\}\cup\{X=4\}\cup\{X=6\}) = \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{2}$ (car la réunion est disjointe). Donc $\mathbb{P}(X=2|X \text{ est pair}) = \frac{(1/6)}{(1/2)} = \frac{1}{3}$.
5. La variable $Y = Z/2$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculons : $\mathbb{P}(Z \geq 1,3) = \mathbb{P}(Y \geq 0,65) = 1-\mathbb{P}(Y \leq 0,65) = 1-0,7422 = 0,2578$.
6. La densité est la fonction suivante de x :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^{-(x+y)^2-(x-y)^2}}{\pi}dy &= \frac{2e^{-2x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2y^2}}{\sqrt{\pi}}dy\\ \text{(changement de variable } u=2y) &= \frac{\sqrt{2}e^{-2x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}du\\ \text{(on reconnaît la densité de la gaussienne)} &= \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$
7. Calculons : comme $\{X=2\}\subset\{X \text{ pair}\}$, $\mathbb{P}(\{X=2\}\cup\{X \text{ est pair}\}) = \mathbb{P}(X=2) = C_3^2(1/4)^2(3/4) = \frac{3\times 3}{4^3} = \frac{9}{64}$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \text{ est pair}) &= \mathbb{P}(\{X=0\}\cup\{X=2\})\\ \text{(réunion disjointe)} &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=2)\\ &= C_3^0(3/4)^3+\frac{9}{64} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.\end{aligned}$$
Donc $\mathbb{P}(X=2|X \text{ est pair}) = \frac{(9/64)}{(9/16)} = \frac{1}{4}$.
8. La variable $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc sa densité est nulle sur $]-\infty;0[$. Pour $u \geq 0$, cette densité est :
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(v)e^{-v}\times\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(u-v)e^{-(u-v)}dv = \int_0^u e^{-v}e^{-u+v}dv = ue^{-u}.$$
La densité cherchée est donc : $u \mapsto \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(u)\times ue^{-u}$.
9. Calculons : comme $\{X>2\}\subset\{X>1\}$, $\mathbb{P}(\{X>2\}\cup\{X>1\}) = \mathbb{P}(X>2) = \int_2^{+\infty}e^{-x}dx = e^{-2}$, $\mathbb{P}(X>1) = e^{-1}$. Donc $\mathbb{P}(X>2|X>1) = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1}$.

10. Nous avons : pour tout $k \in \{2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(2 \text{ faces}|X = k) = C_k^2(1/2)^k$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(2 \text{ faces}) &= \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(2 \text{ faces}|X = k)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=2}^{4} C_k^2(1/2)^k(1/3) \\
&= \frac{1}{4 \times 3} + \frac{3}{8 \times 3} + \frac{4 \times 3}{2 \times 16 \times 3} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2 + 3 + 3}{8}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$