Université de Nice-Sophia Antipolis
L3 MIAGE - Processus stochastiques et analyse de données
Sylvain Rubenthaler `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Exemples de raisonnements, II

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Vous écrirez vos réponses dans les encadrés.

1. Intégrations par parties

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos(x)dx &= [x^2\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2x\sin(x)dx \\
&= (\pi/2)^2(1-(-1)) - \left([-2x\cos(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2\cos(x)dx\right) \\
&= \frac{\pi^2}{2} + 0 - [2\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi^2}{2} - 4\,.
\end{aligned}$$

2. On calcule la dérivée (sauf éventuellement aux point où la dérivée n'existe pas, c'est à dire en 0 et 1). On obtient la fonction f donné par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0;1]\,. \end{cases}$$

3. On applique la formule du cours et on obtient : $C_3^2 \frac{1}{6^2}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{36}\frac{5}{6} = \frac{5}{36\times 2} = \frac{5}{72}$.

4. La variable $Y = X/2$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par symétrie, $\mathbb{P}(X \le -1) = \mathbb{P}(Y \le -1/2) = \mathbb{P}(Y \ge 1/2) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1/2)$. On lit sur la table : $1 - 0,6915 = 0,3085$.

5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{U_1+\cdots+U_n}{n} \le 1.1\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{U_1-1+\cdots+U_n-1}{n} \le 1,1-1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{U_1-1+\cdots+U_n-1}{\sqrt{n}} \le 0,1\times 5\right) \\
&\approx \mathbb{P}(Z \le 0,5)
\end{aligned}$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ (par le théorème central-limite). On regarde la table et on trouve la réponse : $0,6915$.

6. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le 3) &= \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \cdots + \mathbb{P}(Y=3) \\
&= e^{-2}\left(2^0 + 2^1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) \\
&= e^{-2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}\right) = e^{-2}\frac{19}{3}\,.
\end{aligned}$$

7. On calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in [2;4]) &= \int_2^4 \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x) 2e^{-2x} dx \\ &= \int_2^4 2e^{-2x} dx \\ &= [-e^{-2x}]_2^4 = e^{-4} - e^{-8}\,.\end{aligned}$$

8. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= [x^2(-e^{-x})]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx \\ &= 0 + [2x(-e^{-x})]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx \\ &= 0 + [-2e^{-x}]_0^{+\infty} = 2\,.\end{aligned}$$

9. $\mathbb{P}(\max(Y,Z) \leq 3/4) = \mathbb{P}(Y \leq 3/4, Z \leq 3/4) = \mathbb{P}(Y \leq 3/4)\mathbb{P}(Z \leq 3/4)$ (car Y, Z indépendants) $= \frac{9}{16}$.

10. Formule somme géométrique : $\frac{1}{1-(1/3)} = \frac{3}{2}$.

11. La fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ est bijective croissante. L'inverse de g est donnée par : $g^{-1}(x) = \text{signe}(x) \times |x|^{1/3}$. Soit f la densité de Y. Par formule de changement de variable, la densité de Y^3 est la fonction h donnée par

$$h(x) = \frac{f(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{f(\text{signe}(x)\times\}|x|^{1/3})}{3(\text{signe}(x) \times |x|^{1/3})^2} = \frac{\exp(-\frac{|x|^{2/3}}{2})}{\sqrt{2\pi} \times 3|x|^{2/3}}\,.$$

12. La variable $Z = X + Y$ peut prendre les valeurs $-1, 0, 1, 2$. Et ceci avec les probabilités suivantes

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=-1) &= \mathbb{P}(X=0, Y=-1) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24} \\ \mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{8}{24} \\ \mathbb{P}(Z=2) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{5}{24}\,.\end{aligned}$$

13. Par loi des grands nombres:

$$\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} n \overset{\text{p.s.}}{\to} +\infty \mathbb{E}(U_1) = \frac{1}{4}\,.$$