Université de Nice-Sophia Antipolis
L3 MIAGE - Processus stochastiques et analyse de données
Sylvain Rubenthaler `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé de l'exemple

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Vous écrirez vos réponses dans les encadrés.

1.

(a) On dérive partout sauf en $1, 2$. Et on obtient la densité f suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x \in]1;2[\\ 0 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times 2(x-1)dx \\ &= \int_1^2 2x^2 - xdx \\ &= [\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}]_1^2 \\ &= \frac{2}{3}(8-1) - \frac{1}{2}(4-1) \\ &= \frac{14}{3} - \frac{3}{2} = \frac{19}{6}\,. \end{aligned}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \times (1/2) + 1 \times (1/3) + 2 \times (1/6) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \times (1/2) + 1^2 \times (1/3) + 2^2 \times (1/6) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - 4/9 = 5/9$.

3. Soient $U_1, U_2, \ldots$ les variables uniformes appelées par le programme. Elles sont indépendantes. La variables N peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(U_1 \leq 0,5, \ldots, U_{k-1} \leq 0,5, U_k > 0,5) \\ \text{(par indépendance)} &= \mathbb{P}(U_1 \leq 0,5) \times \cdots \times \mathbb{P}(U_{k-1} \leq 0,5) \times \mathbb{P}(U_k > 0,5) \\ &= (1/2)^k\,. \end{aligned}$$

Donc $N \sim \mathcal{G}(1/2)$ (on peut aussi répondre : $\mathbb{P}(N = k) = (1/2)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$).

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2^V) &= \sum_{k\geq 1} 2^k (1-2/3)^{k-1}(2/3) \\
&= \sum_{k\geq 1} \frac{2}{3} 2^{k-1} \left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
\text{(somme géométrique)} &= \frac{2}{3}\frac{1}{1-2\,(1-2/3)} \\
&= \frac{2}{3}\times 3 = 2\,.
\end{aligned}$$

5. Intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx &= [x\times(-\cos(x))]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos(x)dx \\
&= 0 + [\sin(x)]_0^{\pi/2} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

6.

(a) La variables W peut prendre les valeurs suivantes : $-1, 0, 1, 2$.

(b) Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W=-1) &= \mathbb{P}(\{U=0, V=-1\}) \\
&\text{(car ...)} = \mathbb{P}(U=0)\mathbb{P}(V=-1) \\
&= (1/2)(1/2) = 1/4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W=0) &= \mathbb{P}(\{U=0, V=0\}\cup\{U=1, V=-1\}) \\
&\text{(car ...)}\ \mathbb{P}(U=0)\mathbb{P}(V=0) + \mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=-1) \\
&= (1/2)(1/4) + (1/2)(1/2) = 3/8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W=1) &= \mathbb{P}(U=0)\mathbb{P}(V=1) + \mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=0) \\
&= (1/2)(1/4) + (1/2)(1/4) = 1/4
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(W=2) = \mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=1) = 1/8$$

7. Calculons pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{t} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-t} & \text{si } t\geq 0 \end{cases}.$$