Université de Nice-Sophia Antipolis
L3 MIAGE - Processus stochastiques et analyse de données
Sylvain Rubenthaler `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Partiel 1 - sujet C - corrigé

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Toutes les réponses valent 3 points.

1. $\mathbb{P}(X > 2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[2;+\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}dx = \int_2^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_2^{+\infty} = e^{-2}$
2. On note f la densité cherchée. Remarquons que $y = -\log(x)$ est équivalent à $x = e^{-y}$. On applique la formule de changement de variable :
$$f(y) = -\frac{\mathbf{1}_{[0;1]}(e^{-y})}{-\left(\frac{1}{e^{-y}}\right)} = \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(y)e^{-y}\,.$$
3. $\int_{-\pi/2}^{0} -x\sin(x)dx = [x\cos(x)]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\pi/2}^{0}\cos(x)dx = 0 - [\sin(x)]_{-\pi/2}^{0} = -(-(-1)) = -1$
4. $X + Y$ est à valeurs dans $\{2, 3, 4\}$. Calculons : $\mathbb{P}(X + Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X + Y = 3) = \mathbb{P}(\{X = 1, Y = 2\} \cup \{X = 2, Y = 1\}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X + Y = 4) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{3}$.
5. $\mathbb{E}(X^3) = \frac{1}{4}(0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3) = \frac{1}{4}(1 + 8 + 27) = \frac{36}{4} = 9$
6. On peut utiliser une formule du cours. La réponse est $C_3^2 \frac{1}{6^2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{36} \times \frac{5}{3\times 2} = \frac{5}{72}$
7. $\mathbb{P}(Z > 1/2) = \mathbb{P}(X > 1/2, Y > 1/2) + \mathbb{P}(X > 1/2, Y \leq 1/2) + \mathbb{P}(X \leq 1/2, Y > 1/2) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$