M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
Nom :
Prénom :

Corrigé du contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

Exercice 1.

(1) Si $X \sim \mathcal{E}(1)$, nous remarquons que $I = \mathbb{E}(\sqrt{X})$. Donc, en tirant $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de même loi que X, nous avons
$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} I\,,$$
ce qui nous fournit une première méthode de Monte-Carlo. Nous remarquons également que
$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{-x^2/2}} \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\sqrt{x}e^{-x}dx\,.$$
Donc, si $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors $I = \mathbb{E}\left(\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Y)\sqrt{Y}\exp(-Y + \frac{Y^2}{2})\right)$. Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(2) Voir l'algorithme 1. On utilise la méthode du cours pour simuler une variable de loi $\mathcal{E}(1)$.

Exercice 2.

(1) Nous avons $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}dx = 1$ et $g \geq 0$ donc g est bien une densité de probabilité. Pour $x \in [0;2]$, $\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1-(1-x)^2}$ donc la courbe $x \in [0;2] \mapsto \sqrt{2x-x^2}$ est un demi-cercle de centre $(1;0)$ et de rayon 1 (contenu dans le demi-plan supérieur d'équation $y \geq 0$). Donc $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ (l'aire d'un demi-disque de rayon 1). Donc
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2}dx = 1\,.$$
Comme $f \geq 0$, f est bien une densité de probabilité.

(2) Pour tout $x \in [0;2]$,
$$f(x) \leq \frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{4}{\pi} \times g(x)\,.$$

(3) Dans l'algorithme proposé, nous tirons $V \sim \mathcal{U}([0;1])$ et U de densité g jusqu'à ce que
$$V \times \frac{4}{\pi} g(U) \leq f(U)\,.$$
Il s'agit d'un algorithme de rejet. Puisque $f(x) \leq (4/\pi)g(x)$ ($\forall x \in [0;2]$ et aussi $\forall x \in \mathbb{R}$), la variable renvoyée par la fonction est de loi de densité f.

Algorithme 1 Calcul de I.

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,0,1)
 x=-log(u)
 s=s+sqrt(x)
}
s=s/n
print(s)
```