M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)

Nom :

Prénom :

Corrigé du contrôle no 1, sujet C (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en **R**.

Exercice 1.

(1) Pour $t<0$, $\mathbb{P}(X\le t)=0$. Pour $t\ge 1$, $\mathbb{P}(X\le t)=1$. Pour $t\in[0;1/2[$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X\le t) & = & \mathbb{P}(V\le 1/2, U\le t) \\ (\text{car } U \perp\!\!\!\perp V) & = & \mathbb{P}(V\le 1/2)\mathbb{P}(U\le t) \\ & = & \dfrac{t}{2}\,. \end{array}$$

Pour $t=1/2$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X\le t) & = & \mathbb{P}(X<1/2)+\mathbb{P}(X=1/2) \\ (\text{on partitionne l'évènement}) & = & \mathbb{P}(V\le 1/2, U<1/2)+\mathbb{P}(V\le 1/2, U=1/2)+\mathbb{P}(V>1/2) \\ (\text{car } U \perp\!\!\!\perp V) & = & \dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{2} \\ & = & \dfrac{3}{4}\,. \end{array}$$

Pour $t>1/2$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X\le t) & = & \mathbb{P}(V\le 1/2, U\le t)+\mathbb{P}(V>1/2) \\ (\text{car } U \perp\!\!\!\perp V) & = & \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}\,. \end{array}$$

Nous avons donc

$$F(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\le 0\,, \\ \frac{t}{2} & \text{si } t\in\left[0;\frac{1}{2}\right[\,, \\ \frac{1}{2}+\frac{t}{2} & \text{si } t\in\left[\frac{1}{2};1\right]\,, \\ 1 & \text{si } t\ge 1\,. \end{cases}$$

(2) Le pseudo-inverse de F est donc

$$H\,:\,u\in[0;1]\mapsto H(u)=\begin{cases} 2u & \text{si } u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]\,, \\ \frac{1}{2} & \text{si } u\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]\,, \\ -1+2u & \text{si } u\in\left[\frac{3}{4};1\right]\,, \end{cases}$$

(facile à voir sur un dessin).

(3) En utilisant le lemme sur le pseudo-inverse, nous voyons que l'algorithme 1 renvoie une variable de la loi voulue.

Algorithme 1 Simulation de variable aléatoire.

```
H<-function(u)
{
 r=1/2
 if (u<1/4)
 {
  r=2*u
 }
 if (u>3/4)
 {
  r=-1+2*u
 }
 return(r)
}
v=runif(1,0,1)
print(H(v))
```

Exercice 2.

(1) Nous avons $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}dx = 1$ et $g \geq 0$ donc g est bien une densité de probabilité. Pour $x \in [0;2]$, $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(1-x)^2}$ donc la courbe $x \in [0;2] \mapsto \sqrt{2x-x^2}$ est un demi-cercle de centre $(1;0)$ et de rayon 1 (contenu dans le demi-plan supérieur d'équation $y \geq 0$). Donc $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ (l'aire d'un demi-disque de rayon 1). Donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2}dx = 1\,.$$

Comme $f \geq 0$, f est bien une densité de probabilité.

(2) Pour tout $x \in [0;2]$,

$$f(x) \leq \frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{4}{\pi} \times g(x)\,.$$

(3) Dans l'algorithme proposé, nous tirons $V \sim \mathcal{U}([0;1])$ et U de densité g jusqu'à ce que

$$V \times \frac{4}{\pi} g(U) \leq f(U)\,.$$

Il s'agit d'un algorithme de rejet. Puisque $f(x) \leq (4/\pi)g(x)$ ($\forall x \in [0;2]$ et aussi $\forall x \in \mathbb{R}$), la variable renvoyée par la fonction est de loi de densité f.