

M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)

Nom :

Prénom :

Contrôle no 1, sujet C (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

PRÉLIMINAIRES

Rendre la feuille avec la copie.

Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que l'exercice 2 et rendez votre devoir au bout d'une heure trente.

Exercice 1. Soit U, V des variable uniformes sur $[0; 1]$, indépendantes. Soit X définie par

$$X = \begin{cases} U & \text{si } V \leq 1/2, \\ 1/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (1) Calculer la fonction de répartition F de X .
- (2) Donner sans justification le pseudo-inverse de F .
- (3) Écrire dans le cadre ci-dessous un programme en R simule une variable de même loi que X (en utilisant la méthode que vous voulez).

Exercice 2. On s'intéresse à la fonction codée dans l'algorithme 1

- (1) Soient

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;2]}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{2x - x^2},$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;2]}(x) \frac{1}{2}.$$

Montrer que f et g sont des densités de probabilité (on pourra remarquer que $2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2$).

- (2) Montrer que pour tout $x \in [0; 2]$,

$$f(x) \leq \frac{4}{\pi} g(x).$$

- (3) Quelle est la loi de la variable aléatoire renvoyée par l'appel de `simu1(1)` ?

Algorithme 1 Simulation d'une variable aléatoire.

```
simu1<-function(t)
{
  b=0
  while (b==0)
  {
    u=runif(1,0,2)
    v=runif(1,0,1)
    if (v*(1/2)*(4/pi)<(2/pi)*sqrt(2*u-u^2))
    {
      b=1
    }
  }
  return(u)
}
```
