M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
Nom :
Prénom :

Corrigé du contrôle no 1, sujet D (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en ***R*** *.*

Exercice 1.

(1) Nous remarquons que $I = \mathbb{E}(\cos(\sqrt{U}))$ avec $U \sim \mathcal{U}([0;1])$. Donc, si $U_1, U_2, \dots$ sont i.i.d. de même loi que U alors
$$\frac{\cos(\sqrt{U_1}) + \cdots + \cos(\sqrt{U_2})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$
Ce qui nous fournit une méthode de Monte-Carlo.

(2) Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Calcul de I.

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,0,1)
 s=s+cos(sqrt(u))
}
s=s/n
print(s)
```

(3) On veut
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\cos(\sqrt{U_1}) + \cdots + \cos(\sqrt{U_n})}{n} - I\right| \leq 0,01\right) \geq 0,9\,,$$
ce qui est équivalent à
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{\cos(\sqrt{U_1}) + \cdots + \cos(\sqrt{U_n})}{n} - I\right| > 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) < 0,1\,.$$
Par le théorème central-limite, c'est presque la même chose que
$$\mathbb{P}\left(|Z| > 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) < 0,1\,,$$
avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Nous avons (en utilisant les symétries de la gaussienne)
$$\mathbb{P}\left(|Z| > 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \mathbb{P}\left(Z \leq 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right)\,.$$
Nous voulons donc
$$\mathbb{P}\left(Z \leq 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95\,.$$
D'après la table, il suffit donc de prendre n tel que $0,99\times\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \geq 1,65$, donc $n = \left\lceil \left(\frac{1,65}{0,99}\right)^2 \times \sigma^2 \right\rceil$ ($\lceil \dots \rceil$ est la partie entière supérieure) répond à la question.

Exercice 2.

Algorithme 2 Simulation par rejet.

```
C=2*exp(1/2)
simu2<-function(t)
{
 b=0
 while (b==0)
 {
  u=runif(1,0,1)
  v=runif(1,0,1)
  y=-2*log(v)
  if (y>1)
  {
    if (u*C*(1/2)*exp(-(1/2)*y)<exp(-y+1))
    {
      b=1
    }
 }
}
 return(y)
}
```

(1) Nous étudions $h : x \in [1;+\infty[\mapsto \exp(-x+x/2) = \exp(-x/2)$. La fonction h est décroissante donc pour tout $x \geq 1$, $h(x) \leq h(1) = e^{-1/2}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \leq \frac{e^{-1/2}}{e^{-1}} e^{-x/2} \mathbb{1}_{x\geq 1} \leq \frac{2e^{-1/2}}{e^{-1}} g(x)\,. \tag{0.1}$$

Donc

$$C = \frac{2e^{-1/2}}{e^{-1}} = 2e^{1/2}\,.$$

répond à la question.

(2) Soit $\varphi \in C_b^+(\mathbb{R})$ et $X \sim \mathcal{E}(1)$, nous avons

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|X \geq 1) \quad = \quad \frac{\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{X\geq 1})}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X\geq 1})}\,.$$

Nous calculons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{X\geq 1}) &= \int_1^{+\infty} \varphi(x)e^{-x}dx\,, \\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X\geq 1}) &= \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-1}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|X \geq 1) = \int_1^{+\infty} \varphi(x)\frac{e^{-x}}{e^{-1}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{e^{-x}}{e^{-1}}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)dx\,.$$

D'où le résultat.

(3) On utilise un algorithme de rejet basé sur l'inégalité (0.1) (algorithme 2). On utilise la méthode du cours pour simuler une variable de loi $\mathcal{E}(1/2)$.