Corrigé de l'examen (durée : 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Posons $F(a_1,a_2) = \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j(x_{n-j}-(a_1+a_2j))^2$. Nous commençons par chercher les points critiques de F.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a_1}(a_1,a_2) &= \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j(-2)(x_{n-j}-(a_1+a_2j)) \\ &= a_1 \times \sum_{j=0}^{n-1} 2(1-\alpha)^j + a_2 \times \sum_{j=0}^{n-1} 2j(1-\alpha)^j - \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j 2x_{n-j} \,,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2}(a_1,a_2) = a_1 \times \sum_{j=0}^{n-1} 2j(1-\alpha)^j + a_2 \times \sum_{j=0}^{n-1} 2j^2(1-\alpha)^j - \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j 2jx_{n-j} \,.$$

Posons

$$\lambda_0 = \sum_{j=0}^{n-1} 2(1-\alpha)^j \,,\ \lambda_1 = \sum_{j=0}^{n-1} 2j(1-\alpha)^j \,,\ \lambda_2 = \sum_{j=0}^{n-1} 2j^2(1-\alpha)^j \,,$$

$$m_0 = \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j 2x_{n-j} \,,\ m_1 = \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j 2jx_{n-j} \,.$$

Nous cherchons à résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda_0 a_1 + \lambda_1 a_2 &= m_0 \,, \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 &= m_1 \,. \end{cases}$$

Nous remarquons que $\lambda_1^2 \leq \lambda_0\lambda_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). Puisque $n \geq 1$, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} (1-\alpha)^0 \\ (1-\alpha)^1 \\ \vdots \\ (1-\alpha)^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} (1-\alpha)^0 0 \\ (1-\alpha)^1 1 \\ \vdots \\ (1-\alpha)^{n-1}(n-1) \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires. Nous avons donc une inégalité stricte : $\lambda_1^2 < \lambda_0\lambda_2$. Le système ci-dessus admet donc une unique solution

$$\widehat{a}_1 = \frac{m_0\lambda_1 - m_1\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2} \,,\ \widehat{a}_2 = \frac{m_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \times \left(\frac{m_0\lambda_1 - m_1\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2}\right) \,.$$

Montrons que la fonction F est convexe. Soit $\lambda \in [0;1]$, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $(a_1', a_2') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
F(\lambda(a_1,a_2)+(1-\lambda)(a_1',a_2')) &= \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j(x_{n-j}-(\lambda a_1+(1-\lambda)a_1'+(\lambda a_2+(1-\lambda)a_2')j)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j(x_{n-j}-\lambda(a_1+ja_2)-(1-\lambda)(a_1'+ja_2'))^2 \\
\text{(convexité du carré)} &\leq \lambda\sum_{j=0}^{n-1}\left[(1-\alpha)^j(x_{n-j}-(a_1+ja_2))^2\right] \\
&\quad +(1-\lambda)\sum_{j=0}^{n-1}\left[(1-\alpha)^j(x_{n-j}-(a_1'+ja_2'))^2\right] \\
&= \lambda F(a_1,a_2)+(1-\lambda)F(a_1',a_2')\,.
\end{aligned}$$

Donc F est convexe. Donc l'unique point critique est le minimum absolu.

Exercice 2. Pour tout t, la loi de X_t sachant $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ est $\mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ avec $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$. Donc $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{I}_{t-1}) = 0$. D'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$. De plus

$$\mathbb{V}(X_t|\mathcal{I}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2\,,$$

d'où la relation (puisque la suite est stationnaire)

$$\mathbb{V}(X_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{V}(X_t)\,,$$

et donc

$$\mathbb{V}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^p \alpha_i}\,.$$

Pour $h > 0$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{I}_{t-1}) = 0$, $\mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{I}_{t-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{I}_{t+h-1})|\mathcal{I}_t) = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}|\mathcal{I}_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_tX_{t+h}|\mathcal{I}_{t-1}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_tX_{t+h}|\mathcal{I}_{t+h-1})|\mathcal{I}_t) \\
&= \mathbb{E}(X_t\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{I}_{t+h-1})|\mathcal{I}_t) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

(1) On écrit le polynôme caractéristique :

$$A(z) = 1 - \frac{z}{2}\,.$$

Son unique racine est 2, qui est de module > 1 donc il existe bien un processus stationnaire vérifiant la relation de récurrence voulue.

(2) Nous avons

$$\mathbb{E}(X_n^2) = 1 + \frac{\mathbb{E}(X_{n-2}^2)}{4}$$

car $X_{n-2} \perp\!\!\!\perp \epsilon_n$. Donc $\sigma(0) = \frac{4}{3}$. Nous avons

$$\mathbb{E}(X_nX_{n-1}) = \frac{\mathbb{E}(X_{n-1}X_{n-2})}{4}$$

car $X_{n-1} \perp\!\!\!\perp \epsilon_n$. Donc $\sigma(1) = 0$.

(3) Relation de récurrence du cours : $\forall h > 0$, $\sigma(h) = -\frac{\sigma(h-2)}{2}$. D'où

$$\sigma(h) = \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2^{h/2}} & \text{si } h \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(4) Nous calculons la densité spectrale (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} e^{-ih\lambda}\sigma(h) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sigma(0) + \frac{1}{2\pi}\sum_{h\geq 1}(e^{-i(2h)\lambda} + e^{i(2h)\lambda})\sigma(2h) \\
&= \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi}\sum_{h\geq 1}(e^{-2ih\lambda} + e^{2ih\lambda})\frac{1}{2^h} \\
&= \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{e^{-2i\lambda}}{1-\frac{e^{-2i\lambda}}{2}} + \frac{e^{2i\lambda}}{1-\frac{e^{2i\lambda}}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi}\frac{e^{-2i\lambda}\left(1-\frac{e^{2i\lambda}}{2}\right) + e^{2i\lambda}\left(1-\frac{e^{-2i\lambda}}{2}\right)}{1+\frac{1}{4}-\frac{(e^{-2i\lambda}+e^{2i\lambda})}{2}} \\
&= \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi}\frac{2\cos(2\lambda)-1}{\frac{5}{4}-\cos(2\lambda)} \\
&= \frac{2}{3\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}+\cos(2\lambda)}{\frac{5}{4}-\cos(2\lambda)}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4.

(1) `n=100; x=arima.sim(modele,n)`

(2) Périodogramme : `P=abs(fft(x)/n)^2 ; Fr=(0:(n-1))*2*pi/n ; plot(Fr,P,type='o',xlab='fréquence',ylab`
Densité spectrale : `k=kernel("daniell",4); spec.pgram(x,k,taper=0,log="no");`

(3) Le périodogramme a un maximum en (environ) $4,5-\pi$ et en $-(4,5-\pi)$, ce qui correspond à une composante périodique de période

$$2\pi/(4,5-\pi) = 4,6$$

que l'on arrondit à 5 pour avoir un nombre entier .
La densité spectrale a un maximum en (environ) $\pi/3$, ce qui correspond à une composante périodique de période

$$2\pi/(\pi/3) = 6$$

(qui est le nombre auquel on pouvait s'attendre en regardant le modèle).