M1 IM - Séries temporelles

Examen (durée : 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une série temporelle ($n \geq 1$). Soient $\alpha \in]0;1[$. Calculer

$$(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2) = \underset{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2}{\arg\min} \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j (x_{n-j} - (a_1 + a_2 j))^2 .$$

(On demande de faire une démonstration similaire à celle du cours.)

Exercice 2. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $ARCH(p)$ de coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0$ (donc supposé stationnaire). On admet que les $W_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ forment un bruit blanc. Pour tout t, on note $\mathfrak{I}_t = \{X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}$.

Montrer les formules suivantes (On demande de faire une démonstration du cours et on suppose $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 1$.)

$$\text{pour tout } t : \mathbb{E}(X_t) = 0,\ \mathbb{E}(X_t|\mathfrak{I}_{t-1}) = 0,\ \mathbb{V}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^p \alpha_i} (\text{si } \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0),$$

$$\mathbb{V}(X_t|\mathfrak{I}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p}^2,\ \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0 \ (\text{si } h > 0),$$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}|\mathfrak{I}_{t-1}) = 0$$

Exercice 3. On considère un processus auto-régressif $(X_n)_{n\geq 0}$ d'ordre 2 satisfaisant :

$$X_n + \frac{X_{n-2}}{2} = \epsilon_n \tag{0.1}$$

(pour $n \geq 2$, avec des (ϵ_n) indépendants et identiquement distribués, de loi $\mathcal{N}(0,1)$).

(1) Montrer qu'il existe un processus stationnaire satisfaisant la relation (0.1) ci-dessus (on pourra utiliser un théorème du cours). (Rappel : un tel processus est centré.) Dans la suite, on suppose que (X_n) est stationnaire et vérifie (0.1).

(2) Soit σ la fonction d'auto-covariance de $(X_n)_{n\geq 0}$. Calculer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$ (écrire les résultats sous forme de fraction rationnelle réduite).

(3) Calculer $\sigma(h)$ pour tout $h \geq 2$.

(4) Calculer la densité spectrale de la série (X_n).

Exercice 4. On s'intéresse au processus ARMA stationnaire (X_t) vérifiant l'équation de récurrence

$$X_t - \sum_{i=1}^3 a_i X_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^2 b_i \epsilon_{t-i}$$

avec (ϵ_t) un bruit blanc et $a_1 = 0,2$; $a_2 = 0,4$; $a_3 = 0,3$; $b_1 = 0,5$; $b_2 = 0,2$.

(1) Donner une instruction `R` permettant de simuler une trajectoire de (X_t) pour t entre 1 et 100. Notons `x` le résultat obtenu.

(2) Donner des instructions `R` permettant de tracer la densité spectrale (approchée) de (X_t).

(3) On suppose que la densité spectrale obtenue est celle de la figure (0.1). Que nous dit ce graphique sur la composante périodique de (X_t) ?

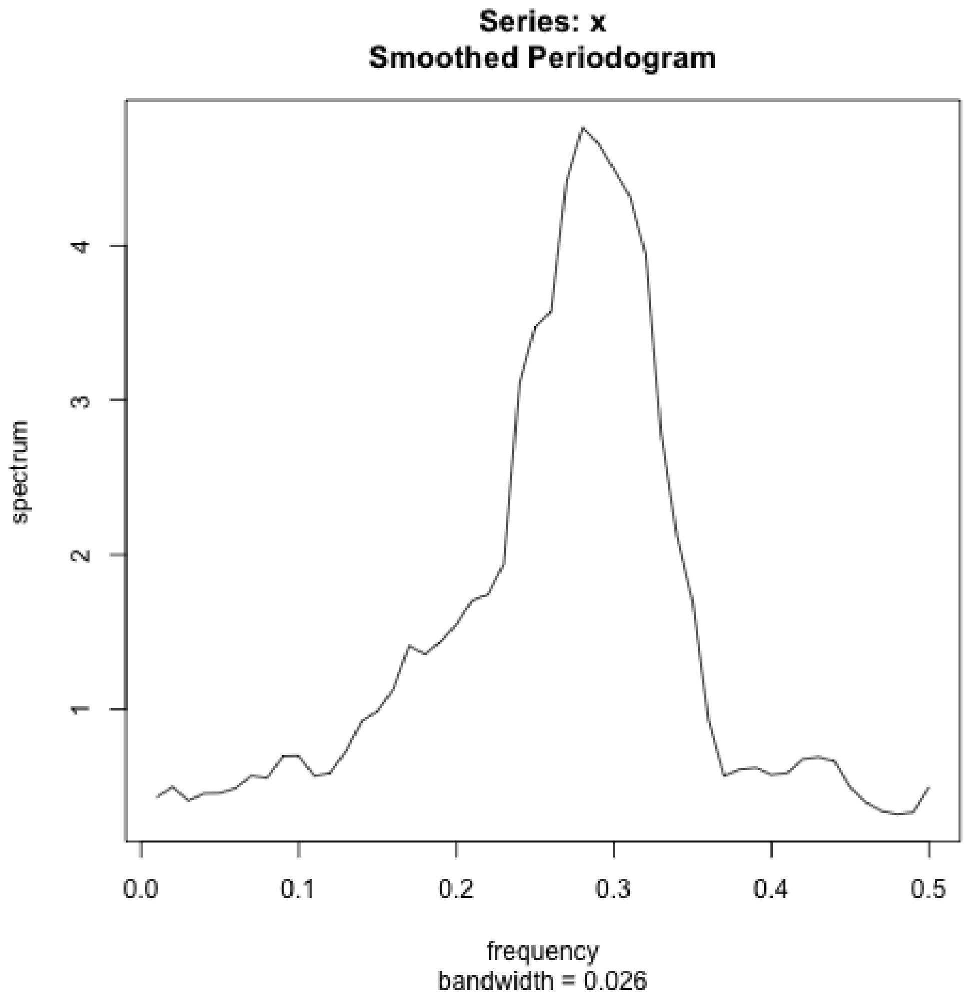

FIGURE 0.1. Densité spectrale