M1 IM - Séries temporelles - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`
Nom :
Prénom :

Contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. Soient $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ indépendant identiquement distribués, centrés et de variance σ^2. On se donne un processus ARMA stationnaire vérifiant pour tout t dans $\mathbb{Z}$,

$$X_t + \frac{X_{t-1}}{6} - \frac{X_{t-2}}{3} = \epsilon_t - \frac{\epsilon_{t-2}}{4}\,.$$

(1) Soit $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(X_{t-k} + \frac{X_{t-k-1}}{6} - \frac{X_{t-k-2}}{3}\right)$$

est finie presque sûrement.

(2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(X_{t-k} + \frac{X_{t-k-1}}{6} - \frac{X_{t-k-2}}{3}\right) = X_t + \frac{2X_{t-1}}{3}\,.$$

(3) Montrer que pour tout $t \in Z$,

$$X_t + \frac{2X_{t-1}}{3} = \epsilon_t + \frac{\epsilon_{t-1}}{2}\,.$$

Exercice 2. Soit `x` une série temporelle de longueur `n`. On cherche à ajuster un modèle $ARMA_{p,q}$ sur `x`. Écrire un programme `R` qui trouve le couple (p,q) minimisant le critère AIC parmi les couples de la liste suivante : $\{(p,q)\,:\, p,q \in \{0,1,2,3\},\, p+q>0\}$.

Exercice 3. Soit une série temporelle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 100$). Le graphe de cette série est visible dans la figure 0.1, en haut.

(1) On suppose que $\Delta^2 x$ est un processus stationnaire (voir la figure 0.1, en bas pour le graphe de $\Delta^2 x$). Écrire les commandes `R` permettant de tracer les auto-corrélations (empiriques) et les auto-corrélations partielles (empiriques) de $\Delta^2 x$ (elles sont tracées dans la figure 0.2). Répondre dans la case ci-dessous.

(2) Le processus $\Delta^2 x$ ressemble-t-il plus à un $AR(p)$ ou un $MA(q)$? Pour quel p ou q ?

(3) À quelle classe appartient le processus x ?

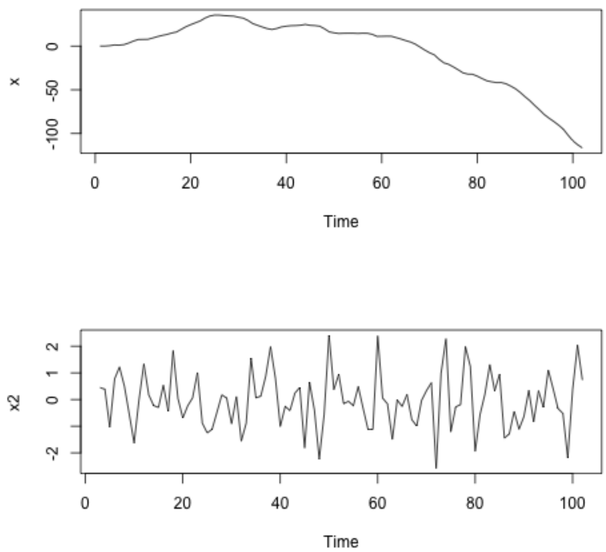

FIGURE 0.1. Graphe de x (en haut) et de $\Delta^2 x$ (en bas).

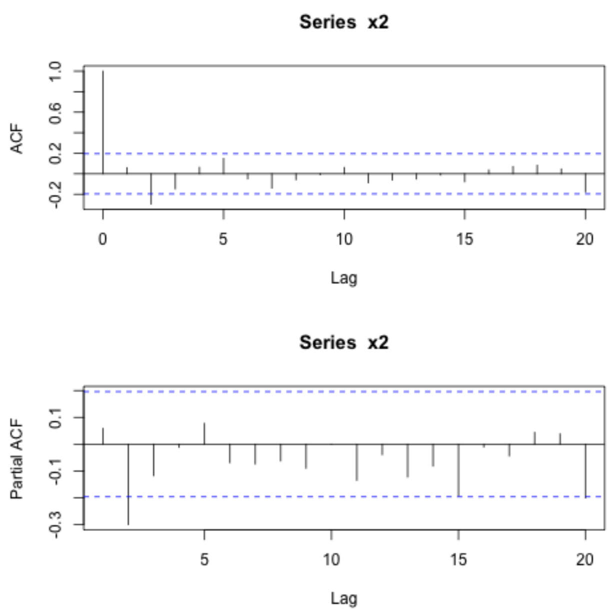

FIGURE 0.2. Auto-corrélations et auto-corrélations partielles de $\Delta^2 x$.