M1 IM - Séries temporelles - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`
Nom :
Prénom :

Contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. Soit `x` une série temporelle de longueur 100. Pour α dans la liste $\{0,1;0,2;0,3;\dots;0,9\}$, on note $\widehat{x}_{t,1}^{(\alpha)}$ la prédiction en $t+1$ obtenue avec le lissage de Holt-Winters sans saisonnalité de paramètres (α,α). Pour α fixé et t allant de 50 à 99, on fait la somme des carrés des erreurs de prédiction et on la note SE_α. Écrire un programme `R` qui trouve α minimisant SE_α pour α dans la liste ci-dessus.

Exercice 2. Soient $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ indépendant identiquement distribués, centrés et de variance σ^2. On se donne un processus ARMA stationnaire vérifiant pour tout t dans $\mathbb{Z}$,

$$X_t - \frac{X_{t-1}}{4} - \frac{3X_{t-2}}{8} = \epsilon_t - \frac{5\epsilon_{t-1}}{4} + \frac{3\epsilon_{t-2}}{8}\,.$$

(1) Soit $t\in\mathbb{Z}$. Montrer que la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(X_{t-k} - \frac{X_{t-k-1}}{4} - \frac{3X_{t-k-2}}{8}\right)$$

est finie presque sûrement.

(2) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(X_{t-k} - \frac{X_{t-k-1}}{4} - \frac{3X_{t-k-2}}{8}\right) = X_t + \frac{X_{t-1}}{2}\,.$$

(3) Montrer que pour tout $t\in Z$,

$$X_t + \frac{X_{t-1}}{2} = \epsilon_t - \frac{\epsilon_{t-1}}{2}\,.$$

Exercice 3. Soit une série temporelle $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ($n=100$). Le graphe de cette série est visible dans la figure 0.1, en haut.

(1) On suppose que $\Delta_1\Delta_{10}x$ est un processus stationnaire (voir la figure 0.1, en bas pour le graphe de $\Delta_1\Delta_{10}x$). Écrire les commandes `R` permettant de tracer les auto-corrélations (empiriques) et les auto-corrélations partielles (empiriques) de $\Delta_1\Delta_{10}x$ (elles sont tracées dans la figure 0.2). Répondre dans la case ci-dessous.

(2) Le processus $\Delta^2 x$ ressemble-t-il plus à un $AR(p)$ ou un $MA(q)$ (on suppose que p et q sont ≤ 5) ? Pour quel p ou q ?

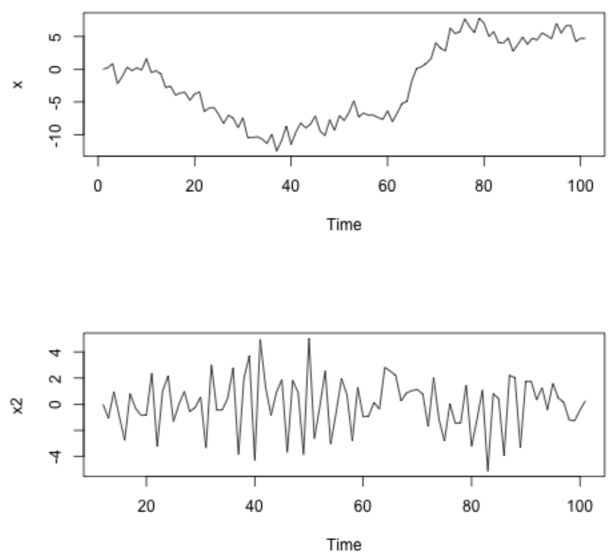

Figure 0.1. Graphe de x (en haut) et de (en bas).

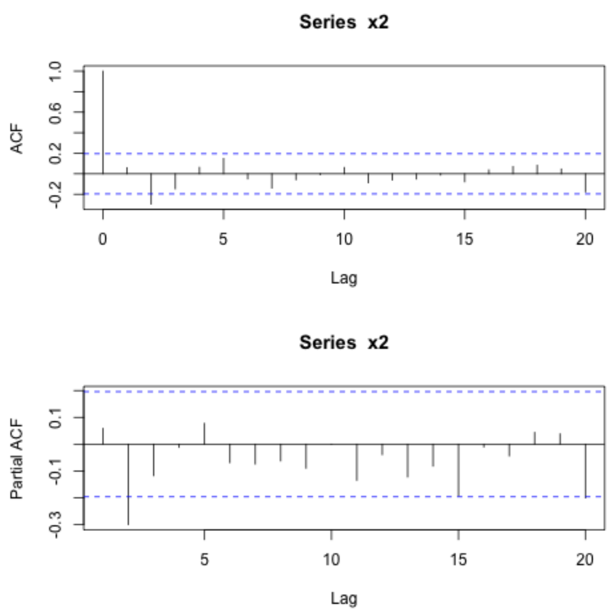

Figure 0.2. Auto-corrélations et auto-corrélations partielles de $\Delta^2 x$.