Corrigé du contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Nous avons une variable U de loi $\mathcal{U}([0;1])$. Soit $\lambda = 2$. D'après le cours, $-\log(U)/\lambda$ est de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

(2) Nous tirons successivement des `t` qui sont de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, notons T_1, T_2, ... les variables qui apparaissent successivement dans la boucle. Le `n` qui est retourné en fin de procédure est le premier entier k tel que $T_1 + T_2 + \dots + T_{k+1} > 1$. Donc, d'après le cours, cette variable est de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

(3) Soit X la variable de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ simulée par la fonction `R`. Le nombre de boucle effectuées pour simuler X est $X+1$. Le nombre moyen de boucle effectué à chaque appel de `simu` est donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} &= \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \lambda\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \lambda + 1\,.\end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Nous commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= [2\sqrt{x}]_0^1 + [-e^{-x}]_1^{+\infty} \\ &= 2 + e^{-1} < +\infty\,.\end{aligned}$$

Donc I est finie.
Si X_1, X_2, ... sont des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$, alors

$$\mathbb{E}(X_1^{-1/2}) = I$$

et $\mathbb{E}(|X_1^{-1/2}|) = \mathbb{E}(X_1^{1/2}) < \infty$. Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{X_1^{-1/2} + X_2^{-1/2} + \dots + X_n^{-1/2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

D'où une première méthode de Monte-Carlo.
Nous pouvons écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)}{\sqrt{x}e^{-x^2/2}}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\,.$$

Donc, si Y_1, Y_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{e^{-Y_1}\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Y_1)}{\sqrt{Y_1}e^{-Y_1^2/2}}\right) = I$$

et

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{e^{-Y_1}\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Y_1)}{\sqrt{Y_1}e^{-Y_1^2/2}}\right|\right) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-Y_1}\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Y_1)}{\sqrt{Y_1}e^{-Y_1^2/2}}\right) < \infty\,.$$

Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-Y_i}\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Y_i)}{\sqrt{Y_i}e^{-Y_i^2/2}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

D'où une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(2) Voir le cadre Algorithme 1. Nous utilisons la méthode du cours pour simuler des variables

Algorithme 1 Méthode de Monte-Carlo

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-log(u)
  s=s+1/sqrt(x)
}
print(s/n)
```

de loi $\mathcal{E}(1)$.

(3) Nous voulons trouver n tel que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1^{-1/2}+\cdots+X_n^{-1/2}}{n}-I\right|\leq 0,02\right)\geq 0,95\,.$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{X_1^{-1/2}+\cdots+X_n^{-1/2}}{n}-I\right|\leq 0,02\times\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq 0,95\,.$$

D'après, le théorème central-limite, ceci est équivalent à

$$\mathbb{P}(|Z|\leq 0,02\times\frac{\sqrt{n}}{\sigma})\geq 0,95$$

avec $Z\sim\mathcal{N}(0;1)$. C'est à dire (en utilisant les symétries de la densité de $\mathcal{N}(0;1)$)

$$\mathbb{P}(Z\leq 0,02\times\frac{\sqrt{n}}{\sigma})\geq 0,975\,.$$

Nous lisons sur la table qu'il suffit de prendre n tel que

$$0,02\times\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\geq 1,96\,,$$

c'est à dire

$$n\geq\left(\frac{1,96\times\sigma}{0,02}\right)^2\,.$$