M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Nous étudions la fonction

$$h \,:\, y \in \mathbb{R}^+ \mapsto -y^2 + y/(2\sigma^2)\,.$$

Nous avons : $h'(x) = -2y + 1/(2\sigma^2)$. D'où le tableau de variation : voir Table 1. Donc, pour

y	0		$\frac{1}{4\sigma^2}$		$+\infty$
$h'(y)$		$+$	0	-	
$h(y)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

Table 1. Tableau de variation

tout y, $h(y) \leq h(-1/(4\sigma^2)) = 1/(16\sigma^4)$. Donc, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\exp(-x^4 + x^2/(2\sigma^2)) \leq \exp(1/(16\sigma^2))\,,$$

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{Z} \exp\left(\frac{1}{16\sigma^2}\right) g(x)\,.$$

Nous avons donc $f(x) \leq Cg(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avec

$$C = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{Z} \exp\left(\frac{1}{16\sigma^2}\right)\,.$$

(2) Nous utilisons la méthode de simulation par acceptation/rejet. Nous avons

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{Cg(x)} = \frac{\exp(-x^4)}{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{16\sigma^2}\right)}$$

voir Algorithme 1.

Algorithme 1 Acceptation/rejet

```
sigma=2
b=0
while (b==0)
{
  x=sigma*rnorm(1,0,1)
  u=runif(1,0,1)
  if (u<exp(-x^4+x^2-1/(16*sigma^2)))
    { b=1 }
}
print(x)
```

(3) D'après le cours, le nombre moyen de boucle effectuées par le programme est C.

(4) Nous étudions la fonction $\sigma \in \mathbb{R}^+ \mapsto C(\sigma)$. Nous avons

$$C'(\sigma) = \frac{\sqrt{2\pi}}{Z} \exp\left(\frac{1}{16\sigma^2}\right)\left(1 - \frac{1}{8\sigma^2}\right)\,.$$

Ce qui nous donne le tableau de variation de la Table 2. Donc $C(\sigma)$ est minimale pour $\sigma = (2\sqrt{2})^{-1}$.

σ	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$C'(\sigma)$		$-$	0	$+$	
$C(\sigma)$		$\searrow$		$\nearrow$	

TABLE 2. Tableau de variation de C.

Exercice 2.

(1) Pour $u \in [0;1]$, nous cherchons x tel que $F(x) = u$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} u &= \frac{e^x - 1}{e - 1} \\ u(e-1)+1 &= e^x \\ \log(u(e-1)+1)) &= x \,. \end{aligned}$$

Donc $F^{-1}(u) = \log(u(e-1)+1)$ pour tout u dans $[0;1]$.

(2) Nous utilisons le lemme du cours sur la simulation à l'aide du pseudo-inverse : si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors $F^{-1}(U)$ est de loi de répartition F. Voir Algorithme 2.

Algorithme 2 Simulation à l'aide du pseudo-inverse.

```
u=runif(1,0,1)
x=log(u*(exp(1)-1)+1)
print(x)
```