M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 2, sujet B (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir le cours

Exercice 2.

(1) Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |x^{3/2}|e^{-x}dx &= \int_0^{+\infty} x^{3/2}e^{-x}dx \\ &\leq \int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx \\ &= 1-e^{-1} + [-x^2e^{-x}]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} 2xe^{-x}dx \\ &= 1-e^{-1}+e^{-1}+[-2xe^{-x}]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} 2e^{-x}dx \\ &= 1+2e^{-1}+[-2e^{-x}]_1^{+\infty} \\ &= 1+4e^{-1} < \infty\,.\end{aligned}$$

Si nous prenons $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$, nous avons donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

Ce qui nous fournit une première méthode de Monte-Carlo.

(2) Nous remarquons que nous savons calculer

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx &= [-e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= 1+[-e^{-x}]_0^{+\infty} \\ &= 2\,,\end{aligned}$$

et que $x \mapsto x$ est proche de $x \mapsto x^{3/2}$ (pour $x \in \mathbb{R}_+$). Nous écrivons donc

$$\begin{aligned}I &= \mathbb{E}(X_1^{3/2}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_1^{3/2}) - \mathbb{E}(X_1)\,.\end{aligned}$$

Et donc

$$2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{3/2} - X_i \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(3) Voir l'algorithme 1

(4) oir l'algorithme (que nous écrivons à la suite du précédent).

Algorithme 1 Variable de contrôle

```
n=10000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-log(u)
  s=s+x^(3/2)-x
}
print(2+s/n)
```

Algorithme 2 Calcul de variance

```
var=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1) ; v=runif(1,0,1)
  x=-log(u) ; y=-log(v)
  var=var+(x^(3/2)-x-y^(3/2)+y)^2
}
print(var/(2*n))
```