

Corrigé du contrôle no 2, sujet D (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir le cours.

Exercice 2.

(1) Soient $X_1, X_2 \dots$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Nous avons

$$\mathbb{E}(f(X_1)) = I.$$

Par hypothèse, la variables $f(X_1)$ est L^1 , donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} I.$$

Ce qui nous fournit une première méthode de Monte-Carlo.

(2) Nous utilisons le changement de variables sur $]0; +\infty[: x = -\log(1 - e^{-y})$ ($y = -\log(1 - e^{-x})$). Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx &= \int_{+\infty}^0 f(-\log(1 - e^{-y}))(-e^{-y}) dy \\ &= \int_0^{+\infty} f(-\log(1 - e^{-y}))e^{-y} dy. \end{aligned}$$

(3) Nous calculons (comme dans le cours) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\frac{f(X) + f(-\log(1 - e^{-X}))}{2} \right)^2 \right) &= \frac{\mathbb{E}(f(X)^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(f(-\log(1 - e^{-X}))^2)}{4} + \mathbb{E}(f(X)f(-\log(1 - e^{-X}))) \\ &= \frac{\mathbb{E}(f(X)^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(f(X)^2)}{4} + \mathbb{E}(f(X)f(-\log(1 - e^{-X}))) \\ \text{(Cauchy-Schwarz)} &\leq \frac{\mathbb{E}(f(X)^2)}{2} + \sqrt{\mathbb{E}(f(X)^2)} \sqrt{\mathbb{E}(f(-\log(1 - e^{-X}))^2)} \\ &= \mathbb{E}(f(X)^2). \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E} \left(\frac{f(X) + f(-\log(1 - e^{-X}))}{2} \right) = \mathbb{E}(f(X)),$$

nous avons

$$\text{Var} \left(\frac{f(X) + f(-\log(1 - e^{-X}))}{2} \right) \leq \text{Var}(f(X)).$$

(4) Toujours avec les mêmes X_1, X_2, \dots , nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i) + f(-\log(1 - e^{-X_i}))}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} I.$$

Ce qui nous fournit une deuxième méthodes de Monte-Carlo, de variance plus petite que la précédente.

(5) Voir l'algorithme 1.

(6) Voir l'algorithme 2, que nous écrivons à la suite du précédent.

Algorithme 1 Calcul de I

```
f<-function(x)
{ return(sqrt(x)) }
s=0
n=10000
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-log(u)
  s=s+(f(x)+f(-log(1-exp(-x))))/2
}
print(s/n)
```

Algorithme 2 Calcul de variance

```
v=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(2,0,1)
  x=-log(u[1])
  y=-log(u[2])
  v=v+((f(x)+f(-log(1-u[1])))/2-(f(y)-f(-log(1-u[2])))/2)^2
}
print(v/(2*n))
```
