M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Nom :

Prénom :

Contrôle no 2, sujet D (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le deuxième exercice.

Exercice 1. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(|g(X,Y)|) < \infty$. Montrer que

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)) \leq \mathrm{Var}(g(X,Y))$$

(on demande de refaire une démonstration du cours).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| e^{-x} dx < \infty \,.$$

(1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx \,.$$

(2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} f(-\log(1-e^{-x})) e^{-x} dx \,.$$

(3) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(1)$. Montrer que

$$\mathrm{Var}\left(\frac{f(X) + f(-\log(1-e^{-X}))}{2} \right) \leq \mathrm{Var}(f(X)) \,.$$

(4) En déduire une méthode de Monte-Carlo dont la variance est plus petite que celle de la méthode de la question 1.

(5) Écrire un programme en `R` qui calcule I par Monte-Carlo en utilisant cette réduction de variance, dans le cas $f(x) = \sqrt{x}$ (dans le petit cadre ci-dessous).

(6) Écrire un programme en `R` qui calcule la variance de cette méthode par Monte-Carlo (toujours dans le cas $f(x) = \sqrt{x}$).