Corrigé du contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) D'après le cours, ce sont des variables de loi $\mathcal{E}(1)$.

(2) La variable `s` peut prendre les valeurs

$$0\,,\ \frac{X_1}{X_1+\dots+X_{n+1}}\,,\ \frac{X_1+X_2}{X_1+\dots+X_{n+1}}\,,\ \dots\,,\ \frac{X_1+\dots+X_n}{X_1+\dots+X_{n+1}}\,,\ 1\,.$$

(3) Notons K la variable obtenue en fin de programme. Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n+1\}$, nous remarquons que $K=i$ si et seulement si

$$\frac{X_1+\dots+X_{i-1}}{X_1+\dots+X_{n+1}}\le \mathtt{v} < \frac{X_1+\dots+X_i}{X_1+\dots+X_{n+1}}\,.$$

Or, `v` est de loi uniforme. Donc `v` est à valeurs dans $\{1,2,\dots,n+1\}$ et pour tout i dans $\{1,2,\dots,n+1\}$,

$$\mathbb{P}(\mathtt{v}=i)=\frac{X_i}{X_1+\dots+X_{n+1}}\,.$$

Exercice 2.

(1) Nous avons

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{Z}\exp(-x^3+\frac{x^2}{2\sigma^2})\,.$$

Nous étudions

$$x\in\mathbb{R}^+\mapsto h(x)=-x^3+\frac{x^2}{2\sigma^2}\,.$$

Nous avons $h'(x)=-3x^2+\frac{x}{\sigma^2}$. D'où le tableau de variation dans la table 1 Nous avons

x	0		$\frac{1}{3\sigma^2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(1/(3\sigma^2)$	$\searrow$	

Table 1. Tableau de variation.

$$h(1/(3\sigma^2)=\frac{1}{3\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{3}\right)\,.$$

Donc, pour tout x,

$$\frac{f(x)}{g(x)}\le\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{Z}\exp\left(\frac{1}{3\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{3}\right)\right)=:C\,.$$

(2) Nous utilisons la méthode du rejet (vue en cours). Notons U la variable uniforme tirée dans la boucle. On remarque que la condition d'arrêt est

$$Ug(x)\le Cf(x)=\sqrt{2\pi\sigma^2}\exp\left(\frac{1}{3\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{3}\right)\right)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x^3}\,.$$

La constante Z a disparu. Voir le programme dans le cadre Algorithme 1.

(3) D'après le cours, le nombre moyen de boucle effectué par le programme est C.

Algorithme 1 Méthode du rejet

```
sigma=2
b=0
f1<-function(t)
{
  if (t<0)
  { return(0) }
  else
  { return exp(-t^3) }
}
g<-function(t)
{
  return(exp(-t^2/(2*sigma^2))/sqrt(2*pi*sigmq^2))
}
C1=sqrt(2*pi*sigma^2)*exp((1/(3*sigma^2))*(1/(sigma^2)-1/3))
while (b==0)
{
  x=rnorm(1,0,sigma) ; u=runif(1,0,1)
  if (u*g(x)<C1*f1(x))
  { b=1 }
}
print(x)
```

s	0		$\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{1/3}$		$+\infty$
$\phi'(s)$		$-$	0	$+$	
$\phi(s)$		$\searrow$	$\phi((3/\alpha)^{1/3})$	$\nearrow$	

TABLE 2. Tableau de variation

(4) Soit $\alpha = (2/3) - (2/3)^{3/2}$. Nous étudions la fonction

$$s \geq 0 \mapsto \phi(s) = s \exp(\alpha/s^3)\,.$$

Nous avons

$$\phi'(s) = \left(1 - \frac{3\alpha}{s^3}\right) e^{\alpha/s^3}\,.$$

D'où le tableau de variation dans la Table 2. Le σ minimisant la constante C est

$$\sigma_0 = \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$