

Nom :

Prénom :

Contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice. Barème :

2.1->4, 2.2->4, 2.3->2, 2.4->2, 1.1->3, 1.2->3, 1.3->3.

Exercice 1. On s'intéresse au programme dans le cadre Algorithme 1.

Algorithme 1 Simulation de variable aléatoire

```
n=100
tabx=c()
for (i in 1:(n+1))
{
  u=runif(1,0,1); x=-log(u)
  tabx=c(tabx,x)
}
su=sum(tabx) #calcule la somme des éléments de la liste
s=0; k=0
v=runif(1,0,1)
b=0
while (b==0)
{
  s=s+tabx[k+1]
  k=k+1
  if (s/su>v)
    { b=1}
}
print(k)
```

- (1) Quelle est la loi des variables x simulées dans la première boucle ?
- (2) Notons $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ les valeurs dans `tabx` après l'exécution de la première boucle. Quelles valeurs peut prendre la variable s au cours de l'exécution du programme ?
- (3) Quelle est la loi de la variable k affichée en fin de programme, conditionnellement à $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$?

Exercice 2. Soient

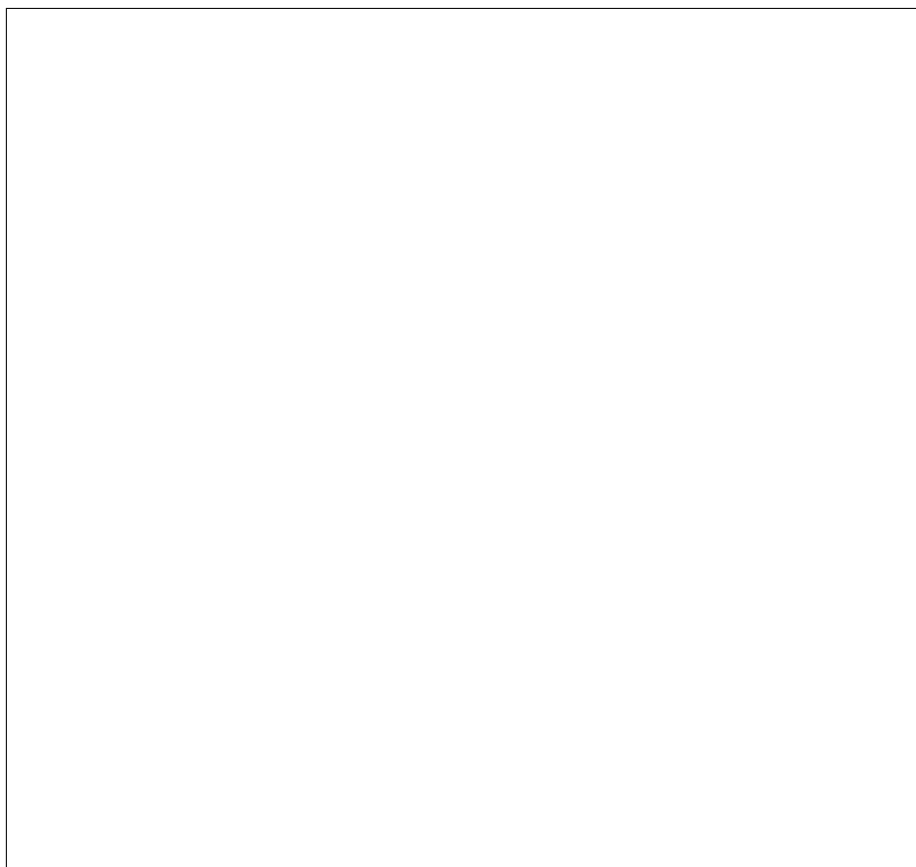
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^3)}{Z} \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(x),$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

avec $Z = \int_0^{+\infty} \exp(-x^3) dx$ et σ une constante > 0 .

- (1) Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout x dans \mathbb{R} .

- (2) Écrire un programme en R qui simule une variable de densité f (on prendra $\sigma = 2$) (écrire le programme dans le cadre ci-dessous et justifier sur la copie).



- (3) Quel est le nombre moyen de boucle effectuées par ce programme ?
(4) Trouver σ minimisant le nombre de boucle effectuées par ce programme.