M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Soit X la variable renvoyée par `simuf` (et U, V les variables apparaissant dans `simuf`). Nous calculons, pour $\varphi \in C_b^+(\mathbb{R})$, ($\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(X)) &= \mathbb{E}(\varphi(\mu_1 - \log(V))\mathbb{1}_{U\leq 1/2} + \varphi(\mu_2 + \log(V))\mathbb{1}_{U>1/2}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varphi(\mu_1 - \log(V))) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varphi(\mu_2 + \log(V))) \\
&= \frac{1}{2}\int_{[0;1]} \varphi(\mu_1 - \log(v))dv + \frac{1}{2}\int_{[0;1]} \varphi(\mu_1 + \log(v))dv \\
\text{(changements de variables)} &= \frac{1}{2}\int_{+\infty}^{\mu_1} \varphi(x)e^{\mu_1 - x}(-dx) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\mu_1} \varphi(x)e^{x-\mu_1}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{e^{-|\mu_1 - x|}}{2}dx\,.
\end{aligned}$$

Donc X est de densité

$$f\,:\, x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-|\mu_1 - x|}}{2}\,.$$

De même, la variable simulée par `simug` est de densité

$$g\,:\, x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-|\mu_2 - x|}}{2}\,.$$

(2) Nous calculons (en remarquant que $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq 0$).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Uf(X) > g(X)) &= \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{u\in[0;1]} \mathbb{1}_{uf(x)>g(x)}du\frac{e^{-|\mu_1 - x|}}{2}dx \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}^-}\int_{u\in[0;1]} \mathbb{1}_{uf(x)>g(x)}du\frac{e^{-|\mu_1 - x|}}{2}dx \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}^-}\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)\frac{e^{-|\mu_1 - x|}}{2}dx \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}^-}\left(1 - e^{|x+1|-|x-1|}\right)\frac{e^{-|x+1|}}{2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1}(1 - e^{-x-1+x-1})\frac{e^{x+1}}{2}dx + \int_{-1}^{0}(1 - e^{x+1+x-1})\frac{e^{x+1}}{2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{x+1}}{2} - \frac{e^{x-1}}{2}dx + \int_{-1}^{0}\frac{e^{x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{2}dx \\
&= \left[\frac{e^{x+1}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{x-1}}{2}\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-\frac{e^{2x+1}}{4}\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{e}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e}{4} + \frac{e^{-1}}{4} \\
&= \frac{e+e^{-1}}{4} - \frac{e^{-2}}{2} \\
&=: p\,.
\end{aligned}$$

Soit Y la variable produite par `simug`. Nous remarquons que $f(-x) = g(x)$ et que X et $-Y$ ont même loi. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Vg(Y) > f(Y)) &= \mathbb{P}(Vg(-X) > f(-X)) \\
&= \mathbb{P}(Vf(X) > g(X)) \\
&= p\,.
\end{aligned}$$

(3) Dans la boucle `while`, nous tirons des variables (X_n, Y_n, U_n, V_n) indépendantes (de même loi que (X, Y, U, V)). Nous nous arrêtons au temps T tel que

$$T = \inf\{n \,:\, Uf(X) > g(X) \text{ ou } Vg(Y) > f(Y)\}\,.$$

Notons, pour $n \geq 1$,

$$A_n = \{U_n f(X_n) < g(X_n)\} \cap \{V_n g(Y_n) < f(Y_n)\}\,.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n^{\complement}) \\
\text{(indépendance des variables)} &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\dots\mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(A_n^{\complement}) \\
\text{(même loi)} &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(A_1)^{n-1}(1 - \mathbb{P}(A_1)) \\
&= \sum_{n\geq 1} n(1-p)^{2(n-1)}(1 - (1-p)^2) \\
\text{(série géométrique dérivée)} &= \frac{(1-(1-p)^2)}{(1-(1-p)^2)^2} \\
&= \frac{1}{1-(1-p)^2}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Pour $u \in [0; 1/12[$, nous remarquons que

$$F(4u) = \frac{4u}{4} = u$$

car $4u \in [0; 1/3[$.
Pour $u \in [1/12; 7/9[$, nous remarquons que $\forall x \in [1/3; 1]$,

$$F(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9} \geq u\,;$$

et si $x < 1/3$, $F(x) < 1/12$. Donc $F^{-1}(u) = 1/3$.
Si $u \in [7/9; 1]$, nous remarquons que $3u - 2 \in [1/3; 1]$ et

$$F(3u-2) = \frac{3u-2}{3} + \frac{2}{3} = u\,.$$

Donc $F^{-1}(u) = 3u - 2$.

(2) Nous utilisons le résultat du cours sur l'inversion de la fonction de répartition. Voir le programme dans le cadre Algorithme 1

Algorithme 1 Inversion de la fonction de répartition.

```
phi<-function(u)
{
  if (u<1/12)
  {return(4*u)}
  else
  {
    if (u<7/9)
    {return(1/3)}
    else
    {return(3*u-2)}
  }
}
u=runif(1,0,1)
print(phi(u))
```