Corrigé du contrôle no 2, sujet A (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

(1) Soient X_1, X_2, ... i.i.d. de loi de densité $2 \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}/(1+x)^3$. Puisque

$$\int_0^{+\infty} |g(x)| \frac{2}{(1+x)^3} dx < \infty \,,$$

la loi des grands nombres nous dit

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} I \,.$$

Ce qui nous donne une première méthode de Monte-Carlo.

(2) Nous utilisons le changement de variable

$$t = \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)^{-1/2} - 1 \,,$$

$$\begin{aligned} dt &= \frac{2}{(1+x)^3} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)^{-3/2} dx \\ &= \frac{1}{(1+x)^3} (t+1)^3 dx \,. \end{aligned}$$

pour calculer

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} h\left(\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)^{-1/2} - 1\right) \frac{2}{(1+x)^3} dx &= \int_{+\infty}^{0} h(x) \times (-1) \times 2(t+1)^{-3} dt \\ &= \int_0^{+\infty} h(x) \frac{2}{(t+1)^3} dt \,. \end{aligned}$$

(3) Notons

$$\varphi \,:\, x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right)^{-1/2} - 1 \,.$$

Par la question précédente :

$$\mathbb{E}(g(\varphi(X))) = \int_0^{+\infty} g(\varphi(x)) \frac{2}{(1+x)^3} dx = \mathbb{E}(g(X))$$

et

$$\mathbb{E}(g(\varphi(X))^2) = \int_0^{+\infty} g(\varphi(x))^2 \frac{2}{(1+x)^3} dx = \mathbb{E}(g(X)^2) \,.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\frac{g(X) + g(\varphi(X))}{2}\right)^2\right) &= \frac{\mathbb{E}(g(X)^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(g(\varphi(X))^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(g(X)g(\varphi(X)))}{2} \\ \text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leq \frac{\mathbb{E}(g(X)^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(g(\varphi(X))^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(g(X)^2)^{1/2}\mathbb{E}(g(\varphi(X))^2)^{1/2}}{2} \\ \text{(d'après remarques ci-dessus)} \quad &= \mathbb{E}(g(X)^2) \,. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Var}\left(\frac{g(X) + g(\varphi(X))}{2}\right) \leq \mathrm{Var}(g(X)) \,.$$

(4) Nous avons
$$\mathbb{E}(|g(\varphi(X))|) = \mathbb{E}(|g(X)|) < \infty\,.$$
Nous avons donc, par la loi des grands nombres,
$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} g(X) + g(\varphi(X)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$
Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo (avec une variance plus petite que la précédente).

(5) Voir le programme dans le cadre Algorithme 1 (dans le quel nous avons codé `simu`).

Algorithme 1 Programme

```
simu<-function(t)
{
  u=runif(1,0,1)
  return(1/sqrt(1-u)-1)
}
g<-function(x)
{ return(sqrt(x)) }
phi<-function(x)
{ return(1/sqrt(1-1/(1+x)^2)-1)}
n=1000; s=0
for (i in 1:n)
{
  x=simu(1)
  s=s+g(x)+g(phi(x))
}
 print(s/(2*n))
```