Corrigé du contrôle no 2, sujet B (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

(1) Nous intégrons une fonction continue positive et
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{-x^2/2}}{e^{-x}}=0\,.$$
Donc, par théorème de comparaison, I est finie.

(2) La fonction f est bien ≥ 0 et nous calculons
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx &= [-e^{-x^2/2}]_0^{+\infty}\\ &= 1\,.\end{aligned}$$
Nous avons
$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}dx<\infty$$
par la question précédente. Donc, par la loi des grands nombres, si $X_1, X_2, \dots$ sont i.i.d. de loi de densité f,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(3) Notons $g(x)=x$. Nous proposons
$$\widetilde{f}_1(x)=e^{-x^2/2}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,.$$
Soit
$$\widetilde{f}(x)=\frac{\widetilde{f}_1(x)}{\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}_1(x)dx}=\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}}\,.$$
Nous remarquons, que si $X\sim\mathcal{N}(0;1)$, alors, pour toute fonction φ dans $C_b^+(\mathbb{R}_+)$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(|X|)) &= \int_{\mathbb{R}_-}\varphi(-x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx+\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\\ (u=-x) &= \int_{+\infty}^0\varphi(u)\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(-du)+\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\varphi(x)\frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}}dx\,.\end{aligned}$$
Donc $|X|$ est de densité $\widetilde{f}$. Donc nous savons simuler suivant la densité $\widetilde{f}$. Nous avons, si Y de densité $\widetilde{f}$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\frac{Yf(Y)}{\widetilde{f}(Y)}\right|\right) &= \mathbb{E}(Y^2)\\ (\text{avec } X\sim\mathcal{N}(0;1)) &= \mathbb{E}(X^2)\\ &< \infty\,.\end{aligned}$$
Donc, par la loi des grands nombres (avec $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. de densité $\widetilde{f}$)
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Y_if(Y_i)}{\widetilde{f}(Y_i)}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Algorithme 1 Programme

```
ftilde<-function(x)
{ return exp(-x*x/2)*sqrt(2/pi) }
f<-function(x)
{ return(exp(-x*x/2)*x) }
g<-function(x)
{ return (x) }
n=1000; s=0
for (i=1:n)
{
  x=rnorm(1,0,1)
  y=abs(x)
  s=s+g(y)*f(y)/ftilde(y)
}
print(s/n)
```

Ce qui nous fournit une nouvelle méthode de Monte-Carlo avec (peut-être) une variance réduite par rapport à la première méthode.

(4) Voir le programme dans le cadre Algorithme 1.

(5) Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \times xe^{-x^2/2}dx &= [x^2(-e^{-x^2/2})]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2/2}dx \\ &= 0 + [-2e^{-x^2/2}]_0^{+\infty} \\ &= 2\,.\end{aligned}$$

Nous posons $h(x) = x^2$. Si Y est de densité f, alors $\mathbb{E}(h(Y)) = 2$. Si $Y_1, Y_2, \dots$ sont i.i.d. de densité f alors, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Y_i - h(Y_i)] + 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Ce qui nous fournit une nouvelle méthode de Monte-Carlo pour calculer I.