M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Nom :

Prénom :

Contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. On s'intéresse au programme dans le cadre Programme 1.

Programme 1 Simulation de variable aléatoire

```
simu<-function(z)
{
  lambda=2
  s=0
  b=0
  n=0
  while (b==0)
  {
    n=n+1
    u=runif(1,0,1)
    t=-log(u)/lambda
    if (t<1)
      { b=1 }
  }
  return(n)
}
```

(1) Quelle est la loi des variables `t` simulées dans la boucle ? (On demande de refaire une démonstration du cours.)

(2) Quelle est la loi de la variable simulée quand on appelle `simu(0)` ?

(3) Quel est le nombre moyen de boucles effectuées quand on fait appel à la fonction `simu` ?

Exercice 2. Soient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{(\sin(x))^2}{Z(1+x^4)} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \text{ avec } Z = \int_0^{+\infty} f(x)dx \,,$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \,.$$

(1) Soit U de loi de densité $u \mapsto 2u\mathbb{1}_{[0;1]}(u)$. Montrer que

$$2\tan(\pi U^2/2)$$

est de loi de densité g.

(2) Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout x.

(3) Écrire un programme en `R` qui simule une variable de loi de densité f (répondre dans le cadre ci-dessous).

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{Z}$. Nous définissons le noyau de Markov suivant sur E :

$$\forall x \in E\,,\; Q(x, x+2) = 1/3\,,\; Q(x, x+3) = 1/6\,,\; Q(x, x-2) = 1/3\,,\; Q(x, x-3) = 1/6\,.$$

Soit $\beta > 0$. Soit

$$\psi \,:\, x \in E \mapsto \psi(x) = \frac{1}{1+\beta x^4}\,.$$

Soit

$$Z = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \psi(x)\,.$$

(1) Montrer que Z est finie.

(2) Montrer que Q est irréductible.

(3) Soit π la mesure de probabilité sur E définie par :

$$\forall x \in E\,,\; \pi(x) = \frac{\psi(x)}{Z}\,.$$

Écrire un programme en `R` qui simule une chaîne de Metropolis de noyau de proposition Q et de loi cible π pour $\beta = 0,5$ (répondre sur la copie).