Université de Nice - L2 - Probabilités

FEUILLE DE TD NUMÉRO 0

Tous les exercices de cette feuille sont à faire, et seront considérés comme traités, même s'ils ne le sont pas durant les séances de TD. Vous pouvez (et êtes encouragés à) poser des questions aux chargés de TD ou au chargé de cours (mais pas la semaine précédent les partiels/examens et en évitant l'usage intempestif du mail).

1. Ensembles

Exercice 1. Expliciter les ensembles suivants et dire si leur cardinal est fini (préciser dans ce cas) ou pas :
1. $\{x \in \mathbb{R} \; ; \; (x+3)/(x+5) \leq 4 \text{ et } x \geq 2\}$.
2. $\{x \in \mathbb{R} \; ; \; (x+3)/(x+5) \leq 4 \text{ ou } x \geq 2\}$.
3. $\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; (x+3)/(x+5) \leq 4 \text{ et } x \geq 2\}$.
4. $\{x \in \mathbb{R} \; ; \; \lim_{n\to+\infty} x^n = 0\}$; $\{x \in \mathbb{C} \; ; \; \lim_{n\to+\infty} x^n = 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} \; ; \; \lim_{n\to+\infty} |x|^n = +\infty\}$.
5. $\{A \subset \{2,3,5,6\} \; ; \; A \cap \{2,4,5\} \neq \emptyset\}$.

Exercice 2. A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \quad \text{et} \quad A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.$$

Exercice 3. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 4. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$.

Exercice 5. Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique (ou indicatrice) de A l'application $\mathbf{1}_A$ de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, telle que :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :
1. $1 - \mathbf{1}_A$.
2. $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
3. $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Remarque : $\mathbf{1}_A(x)$ est souvent notée $\mathbf{1}_{x\in A}$.

Exercice 6. Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après, il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*
1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E,

$$A \triangle X = X \triangle A = A.$$

4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que

$$A \triangle A' = A' \triangle A = X.$$

Exercice 7. Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F^c \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap G^c = \emptyset).$$

Exercice 8. Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point :

1. $I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[,$
2. $I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right],$
3. $I_3 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2}\right].$

Exercice 9. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$.
On rappelle que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) = \{y \in F \ / \ \exists\, x \in A \text{ vérifiant } y = f(x)\}$, et que $\forall A \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(A) = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\}$. Démontrer que :

i) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)),$
ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$
iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$
iv) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$
v) $\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$

Exercice 10. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour $i = 1, 2, 3$ on pose $A_i = \{f \in E / f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E. Généraliser.

Exercice 11. Soit E et F des ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 12. Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 13. Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Ecrire le produit cartésien $A \times B$. Combien y a-t-il d'éléments dans $A \times B$? Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 14. Soit E un ensemble à n éléments et p un entier supérieur à 1. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?

Exercice 15. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 16. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$.

2. Sommes et Produits

Exercice 17. Ecrire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
3. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5$.

Exercice 18. Calculer (en écrivant explicitement les sommes considérées)

1. $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=2}^{5}(j \times k)$.
2. $\sum_{j=2}^{5}\sum_{k=1}^{3}(k \times j)$.
3. $\sum_{k=1}^{3} k\left(\sum_{j=2}^{5} j\right)$.
4. $\sum_{j=2}^{5} j\left(\sum_{k=1}^{3} k\right)$.
5. $\sum_{(k,j)\in\{1,2,3,\}\times\{2,3,4,5\}} kj$.
6. Expliciter l'ensemble $E = \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4, 5\}$ et calculer
$$\sum_{(k,j)\in E}(k \times j).$$
7. Est-il toujours vrai que (I et J sont des ensembles finis)
$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} \quad ?$$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} kh$.
2. $\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h/k$.
3. $\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h^2/k$.

3. Récurrence

Exercice 20. Montrer que si $n \geq 2$ alors
$$1 + 2 + 3 + \cdot + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 21. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$. Démontrer que l'on a $S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

Exercice 22. Montrer que $\forall n \geq 2, \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 23. En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n + 1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.