FEUILLE DE TD NUMÉRO 5

LGN ET TCL

Tous les exercices de cette feuille sont à faire, et seront considérés comme traités, même s'ils ne le sont pas durant les séances de TD. Vous pouvez (et êtes encouragés à) poser des questions aux chargés de TD ou au chargé de cours (mais pas la semaine précédent les partiels/examens et en évitant l'usage intempestif du mail).

1. LGN

Exercice 1. Enoncer la loi faible des grands nombres et la démontrer.

Exercice 2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[\big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\big|^2\big] = 0.$$

Exercice 3 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ une suite infinie dénombrable d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $A = \cap_{n\geq 0} \cup k \geq nA_k$ (que l'on note $\limsup_{n\to\infty} A_n$). Cet événement représente l'événement "une infinité de A_n sont réalisés." Montrer que

1. $A \in \mathcal{F}$.
2. Si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A) = 0$.
3. Si les $\{A_k\ ;\ k \geq 1\}$ sont indépendants entre eux et si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 4 (Loi forte des grands nombres)**.** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(|X_1|^p) < +\infty$ pour tout $p \leq 4$. En particulier la moyenne $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ est bien définie.
2. Soit $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose que $\mu = 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}(S_n^4) = n^{-3}\mathbb{E}(X_1^4) + 12n^{-3}(n-1)[\mathbb{E}(X_1^2)]^2.$$
3. En utilisant l'inégalité de Markov, en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constant $C(\varepsilon) > 0$ telle que
$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^2}.$$
4. En déduire, en utilsant le lemme de Borel-Cantelli, que pour tout $\varepsilon > 0$, l'événement
$$\Omega_\varepsilon = \{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \geq 1, \forall k \geq n, \quad |S_n(\omega)| \leq \varepsilon\}$$
est tel que $\mathbb{P}(\Omega_\varepsilon) = 1$. Pourquoi Ω_ε appartient-t-il à la tribu $\mathcal{F}$?
5. En déduire que l'événement $\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega\ ;\ \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\}$ est tel que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$. On dit que $\mathbb{P}$ presque sûrement la suite $(S_n)_n$ converge vers 0.
6. Généraliser (sans preuve) au cas $\mu \neq 0$.

2. TCL

Exercice 5. Enoncer le TCL.

Exercice 6 (TCL)**.** Montrer le TCL dans le cas où les v.a. i.i.d. considérées sont des lois de Bernoulli de paramètre 1/2. On se limitera au cas des fonctions test $\varphi = \mathbf{1}_{[a,b]}$ pour tous réels $a < b$ et on utilisera la formule de Stirling.

Exercice 7. Une entreprise produit des boîtes de haricots verts. En moyenne, le poids net d'une boîte est 560g, avec un écart-type de 10g. Calculer l'espérance et l'écart-type de la moyenne empirique des poids nets dans un échantillon de 100 boîtes. Quelle est la loi approchée de cette moyenne empirique ?

Exercice 8. Je prends un bus 240 fois dans l'année. On peut considérer que les temps d'attente sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Je sais que le temps moyen d'attente est de 5 minutes. Je sais de plus que le temps d'attente d'un bus suit une loi exponentielle.

Quelle est le paramètre cette loi exponentielle ? Puis-je évaluer la probabilité que mon temps d'attente total sur une année soit inférieur à 19h ?

Exercice 9. Les X_i, $i = 1, \ldots, 100$, sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([1,3])$. On définit $S = X_1 + \ldots + X_{100}$. Estimer la probabilité que S soit plus grande que 215.