

Contrôle no 3, sujet A

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Durée : 2h.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ telle que $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2. Un père a deux enfants. Chaque enfant est un garçon ou une fille avec probabilité $1/2$, indépendamment de l'autre enfant.

- (1) Calculer la probabilité d'avoir deux garçons sachant que l'un au moins des enfants est un garçon.
- (2) On choisit un enfant au hasard parmi les deux (en tirant l'un ou l'autre avec probabilité $1/2$). C'est un garçon. Quelle est la probabilité d'avoir deux garçons ?

Exercice 3. On jette trois dés à six faces (équilibrés).

- (1) Quelle est la probabilité de n'avoir que des chiffres ≤ 3 ?
- (2) Quelle est la probabilité d'avoir au plus deux chiffres 6 ?

Exercice 4. La probabilité pour un coffre-fort de contenir un trésor est $1/200$. Un expert ausculte un coffre-fort pour savoir s'il y a un trésor dedans. Il déclare détecter un trésor. On sait qu'il détecte les trésors dans 80% des cas quand le coffre-fort en contient effectivement un et qu'il affirme en détecter dans 2% des cas quand le coffre-fort n'en contient pas. Quelle est la probabilité que notre coffre-fort contienne un trésor ?

Exercice 5. On s'intéresse à X le nombre de clients rentrant dans une boulangerie un jour donné (X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}). On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (rappel : X vaut n avec probabilité $\lambda^n e^{-\lambda}/n!$). Chaque client a une probabilité $p > 0$ d'acheter au moins un croissant (et ceci indépendamment des autres clients). On note X_1 le nombre de client qui ont acheté au moins un croissant, et $X_2 = X - X_1$. (Rappel : $\mathbb{E}(X) = \lambda$).

- (1) Calculer la loi de X_1 .
- (2) Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
- (3) Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendants ?