L2 MATHS - Probabilités 1- 2018-2019
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé du contrôle no 3, sujet B

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Puisque $\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)=1$, nous avons $\mathbb{P}(X=1)=1/4$. Nous calculons donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 3\\ &= \frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}\\ &= \frac{8}{4}=2\,.\end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Nous notons X_1 le sexe du premier enfant ($X_1=G$ avec probabilité $1/2$, $X_1=F$ avec probabilité $1/2$) et X_2 le sexe du deuxième enfant. Nous calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=X_2=G|X_1=G) &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1=X_2=G\}\cap\{X_1=G\})}{\mathbb{P}(X_1=G)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1=X_2=G)}{\mathbb{P}(X_1=G)}\\ &= \frac{(1/4)}{(1/2)}\\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

(2) Nous notons I l'indice de l'enfant choisi au hasard ($\mathbb{P}(I=1)=\mathbb{P}(I=2)=1/2$). Nous calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_1,X_2\}=\{F,G\}|X_I=F) &= \frac{\mathbb{P}(\{\{X_1,X_2\}=\{F,G\}\}\cap\{X_I=F\})}{\mathbb{P}(X_I=F)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1=F,X_2=G,I=1\}\cup\{X_1=G,X_2=F,I=2\})}{\mathbb{P}(\{X_1=F,I=1\}\cup\{X_2=F,I=2\})}\\ \text{(réunion d'événements disjoints)} &= \frac{\mathbb{P}(X_1=F,X_2=G,I=1)+\mathbb{P}(X_1=G,X_2=F,I=2)}{\mathbb{P}(X_1=F,I=1)+\mathbb{P}(X_2=F,I=2)}\\ \text{(indépendance d'événements)} &= \frac{(1/2)^3+(1/2)^3}{(1/2)^2+(1/2)^2}\\ &= \frac{(1/4)}{(1/2)}=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Exercice 3. Nous notons X_1, X_2, X_3 les résultats des lancers de dé.

(1) Nous calculons (en utilisant l'indépendance)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1,X_2,X_3\geq 2) &= \mathbb{P}(X_1\geq 2)\mathbb{P}(X_2\geq 2)\mathbb{P}(X_3\geq 2)\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}\,.\end{aligned}$$

(2) Nous calculons (en utilisant l'indépendance)

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((X_1,X_2,X_3)\notin\{(1,1,k),(1,k,1),(k,1,1),k\in\{1,2,\dots,6\}\})=\\ &\quad 1-\mathbb{P}((X_1,X_2,X_3)\in\{(1,1,k),(1,k,1),(k,1,1),k\in\{1,2,\dots,6\}\})=\\ &\qquad 1-\frac{6+6+6-2}{6^3}=1-\frac{16}{216}=\frac{200}{216}\,.\end{aligned}$$

Exercice 4. Nous notons X la couleur de la première boule et Y la couleur de la deuxième boule. Nous calculons (en utilisant la formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=R) &= \mathbb{P}(Y=R|X=R)\mathbb{P}(X=R)+\mathbb{P}(Y=R|X=V)\mathbb{P}(X=V)\\
&\quad +\mathbb{P}(Y=R|X=B)\mathbb{P}(X=B)\\
&= \frac{6}{6+2+3}\times\frac{4}{4+2+3}+\frac{4}{4+4+3}\times\frac{2}{4+2+3}+\frac{4}{4+2+5}\times\frac{3}{4+2+3}\\
&= \frac{6}{11}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{11}\times\frac{3}{9}\\
&= \frac{24+8+12}{11\times 9}\\
&= \frac{44}{99}\\
&= \frac{4}{9}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

(1) La variable X_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Nous calculons, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1=n) &= \sum_{k\geq n}\mathbb{P}(X=k,X_1=n)\\
&= \sum_{k\geq n}\mathbb{P}(X_1=n|X=k)\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k\geq n}C_k^n p^n(1-p)^{k-n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\
&= \left(\frac{p}{1-p}\right)^n\sum_{k\geq n}(1-p)^k\frac{1}{n!(n-k)!}\lambda^k e^{-\lambda}\\
\text{(changement d'indice)} &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^n\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n\sum_{i\geq 0}(1-p)^i\lambda^i\frac{e^{-\lambda}}{i!}\\
&= \frac{p^n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Donc X_1 est de loi $\mathcal{P}(p\lambda)$.

(2) De même que ci-dessus, nous pouvons montrer que $X_2 \sim \mathcal{P}((1-p)\lambda)$. Nous avons $\mathbb{E}(X_1) = p\lambda$, $\mathbb{E}(X_2) = (1-p)\lambda$. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} k(n-k)\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} k(n-k)\mathbb{P}(X_1 = k, X = n) \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k+1} k(n-k)C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k+1} \frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}\lambda^n e^{-\lambda} \\
\text{(changement d'indice)} &= \sum_{k\geq 1} \frac{p^k}{(k-1)!}(1-p)\lambda^{k+1}\sum_{i\geq 0}\frac{(1-p)^i\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \\
&= \sum_{k\geq 1} \frac{p^k}{(k-1)!}(1-p)\lambda^{k+1}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 p(1-p)\sum_{k\geq 1}\frac{p^{k-1}}{(k-1)!}\lambda^{k-1}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 p(1-p)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

(3) Pour tout k dans $\mathbb{N}$ et $n \geq k$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k) &= \mathbb{P}(X_1 = k, X = n) \\
&= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \frac{p^k(1-p)^{n-k}\lambda^n e^{-\lambda}}{k!(n-k)!}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) &= \frac{(p\lambda)^k e^{-p\lambda}}{k!} \times \frac{(p\lambda)^{n-k}e^{-(1-p)\lambda}}{(n-k)!} \\
&= \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k)\,.
\end{aligned}$$

Donc X_1 et X_2 sont indépendants.