Corrigé du contrôle no 1, sujet A (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soient X_1, X_2, ... des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Nous remarquons que la fonction

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (parce que l'équivalent de $\sin(x)$ en 0 est x). Donc $\mathbb{E}(|\sin(X_1)/\sqrt{X_1}|)$ est finie. Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(X_i)}{\sqrt{X_i}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}\left(\frac{\sin(X_1)}{\sqrt{X_1}}\right) = I\,.$$

Nous pouvons aussi écrire

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} 2e^{-x/2} \times \frac{1}{2} e^{-x/2} dx\,.$$

Soient Y_1, Y_2, ... des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/2)$. Nous remarquons que la fonction

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} 2e^{-x/2}$$

est bornée (comme produit de deux fonctions bornées). Donc

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{\sin(Y_1)}{\sqrt{Y_1}} 2e^{-Y_1/2}\right|\right)$$

est finie. Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(Y_i)}{\sqrt{Y_i}} 2e^{-Y_i/2} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}\left(\frac{\sin(Y_1)}{\sqrt{Y_1}} 2e^{-Y_1/2}\right) = I\,.$$

Exercice 2.

(1) Nous avons

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\,.$$

Donc, pour $x \geq 1$,

$$e^{x^2} \geq 1 + x^2\,.$$

Donc, pour tout x,

$$f(x) \leq \frac{1}{Z} \times g(x)\,.$$

Nous prenons $C = 1/Z$.

(2) Nous calculons la fonction de répartition de la densité g. Pour $x \geq 0$,

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}\,.$$

Donc

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Nous calculons ensuite l'inverse de G (qui est continue). Si $u = x/(1+x)$ alors

$$\begin{aligned} u(1+x) &= x \\ u &= x(1-u) \\ x &= \frac{u}{1-u}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$G^{-1} \,:\, u \in [0;1[\mapsto \frac{u}{1-u}\,.$$

D'après le cours, si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors $U/(1-U)$ est de loi de densité g.

(3) Si nous tirons
- U_1, U_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$,
- X_1, X_2, ... i.i.d. de loi de densité g (indépendants des U_i),

et que nous posons $\tau = \inf\{n \,:\, U_n \times C \times g(X_n) \le f(X_n)\}$. Alors X_τ est de loi de densité g. Nous remarquons que la condition d'arrêt est

$$U_n \times \frac{1}{1+X_n^2} \le e^{-X_n^2}$$

(dans laquelle Z n'apparaît pas).

(4) Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Simulation par rejet.

```
b=0
while (b==0)
{
  v=runif(1,0,1)
  x=v/(1-v)
  u=runif(1,0,1)
  if (u/(1+x^2)<exp(-x^2))
  { b=1 }
}
print(x)
```