

## Corrigé du contrôle no 1, sujet B (durée 1h)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.*

### Exercice 1.

(1) Nous rappelons la formule :

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}.$$

Pour  $u \in [0; 1/3[$ , nous avons donc  $\{x : F(x) \geq u\} = [3u; +\infty[$  donc  $F^{-1}(u) = 3u$ .  
 Pour  $u \in [1/3; 1/2]$ ,  $\{x : F(x) \geq u\} = [1; +\infty[$  donc  $F^{-1}(u) = 1$ . Pour  $u \in ]1/2; 2/3]$ ,  
 $\{x : F(x) \geq u\} = [2; +\infty[$  donc  $F^{-1}(u) = 2$ . Pour  $x \in ]2/3; 1]$ ,  $\{x : F(x) \geq u\} = [3u; +\infty[$   
 so  $F^{-1}(u) = 3u$ . Nous avons donc

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 3u & \text{si } u \in [0; 1/3[, \\ 1 & \text{si } u \in [1/3; 1/2], \\ 3u & \text{si } u \in [1/2; 1]. \end{cases}$$

(2) Voir l'algorithme 1 (nous utilisons le résultat du cours sur l'inversion de la fonction de répartition).

---

#### Algorithme 1 Simulation.

---

```

u=runif(1,0,1)
z=1
if (u<1/3)
{ z=3*u }
else
{
  if (u>1/2)
  { z=3*u }
}
print(z)

```

---

### Exercice 2.

(1) We study

$$h : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{-x^2 - x + \lambda x}.$$

We have  $h'(x) = (-2x + \lambda - 1)h(x)$ . D'où le tableau de variation de la table 1. Nous prenons

$x$	0	$\frac{\lambda-1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

TABLE 1. Tableau de variation

donc

$$C = \frac{1}{\lambda Z} \exp\left(\frac{(\lambda-1)^2}{4}\right).$$

- (2) Si nous tirons
- $U_1, U_2, \dots$  i.i.d. de loi  $\mathcal{U}([0; 1])$ ,
  - $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  (indépendants des  $U_i$ ),
- et que nous posons  $\tau = \inf\{n : U_n \times C \times g(X_n) \leq f(X_n)\}$ . Alors  $X_\tau$  est de loi de densité  $g$ . Nous remarquons que la condition d'arrêt est

$$U_n \times e^{-\lambda X_n} \leq e^{-X_n^2 - X_n}$$

(dans laquelle  $Z$  n'apparaît pas).

- (3) Voir l'algorithme 2. Nous utilisons la méthode du cours pour simuler une variable de loi exponentielle.

---

**Algorithme 2** Simulation par rejet.

---

```

b=0
while (b==0)
{
  v=runif(1,0,1)
  x=-log(v)
  u=runif(1,0,1)
  if (u*exp(-x)<exp(-x*x-x))
  { b=1 }
}
print(x)

```

---