M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2018-2019
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 2, sujet A (durée 1h45)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$, nous calculons, pour $V \sim \mathcal{U}([0;1])$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(1/V)) &= \int_0^1 \varphi(1/v)dv \\ (x=1/v) \quad &= \int_{+\infty}^1 \varphi(x)\frac{(-1)}{x^2}dx \\ &= \int_1^{+\infty} \varphi(x)\frac{1}{x^2}dx\,. \end{aligned}$$

Donc la variable qui nous intéresse a pour densité

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)}{x^2}\,.$$

(2) Nous étudions, pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 e^{-\sqrt{x}} \\ h'(x) &= (2x - x^2\frac{1}{2\sqrt{x}})e^{-\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{x}{2}(4-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation de la table 1. Donc pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq \frac{16^2e^{-4}}{Z}g(x)$

x	1		16		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	-	
$h(x)$		$\nearrow$	16^2e^{-4}	$\searrow$	

Table 1. Tableau de variation

(3) Dans la fonction `simu`, nous tirons X_1, X_2, ... i.i.d. de loi de densité g et U_1, U_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$ (et indépendants des X_i). Nous arrêtons la boucle au premier n tel que

$$16^2e^{-4}U_n \leq X_n^2\exp(-\sqrt{X_n})\,. \tag{0.1}$$

La fonction `simu` renvoie alors X_n. Nous pouvons reécrire l'équation (0.1) en

$$U_n \times \frac{16^2e^{-4}}{Z} \times g(X_n) \leq f(X_n)\,.$$

À cause du résultat de la question précédente, nous voyons alors que la fonction `simu` est un algorithme d'acceptation/rejet qui simule une variable de loi de densité f.

Exercice 2.

(1) Soit X de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Montrons que $|X|$ est de densité f. Nous calculons, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(|X|)) &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(-x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
(y=-x) \quad &= \int_{+\infty}^{0} \varphi(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(-dy) + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}}dx \,.
\end{aligned}$$

(2) Nous avons, pour $X \sim \mathcal{N}(0;1)$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx \,.$$

Cette dernière intégrale est convergente car $x^2 \times x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, si nous tirons X_1, X_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors (par la loi des grands nombres)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I \,.$$

(3) Nous proposons de prendre

$$\widetilde{f}_1(x) = xe^{-x^2/2}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$$

(c'est une fonction qui a l'air raisonnablement proche de $f \times g$). Nous avons

$$\int_0^{+\infty} \widetilde{f}_1(x)dx = [-e^{-x^2/2}]_0^{+\infty} = 1 \,.$$

Nous posons donc $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1$. Nous pouvons calculer la fonction de répartion de la densité $\widetilde{f}$ (pour $x \geq 0$) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x) &= \int_0^x te^{-t^2/2}dt \\
&= [-e^{-t^2/2}]_0^x \\
&= 1 - e^{-x^2/2} \,.
\end{aligned}$$

Et nous savons inverser cette fonction de répartition. Si $u \in [0;1]$, cherchons x tel que $u = F(x)$. Il suffit de prendre

$$\begin{aligned}
u &= 1 - e^{-x^2/2} \\
e^{-x^2/2} &= 1 - u \\
x &= \sqrt{-2\log(1-u)} \,.
\end{aligned}$$

Donc nous savons simuler des variables de loi de densité $\widetilde{f}$ (c'est la méthode « par inversion de la fonction de répartion » du cours).

Nous avons donc une deuxième méthode de Monte-Carlo pour calculer I (dont on peut espérer que la variance est réduite par rapport à la première méthode). Remarquons que, pour $x \geq 0$,

$$\frac{f(x)g(x)}{\widetilde{f}(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x \,.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left|\frac{f(x)g(x)}{\widetilde{f}(x)}\right| \widetilde{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)g(x)dx < \infty \,.$$

Nous tirons U_1, U_2, … i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$ et, par la loi des grands nombres, nous avons :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{-2\log(1-U)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I.$$

(4) Voir le programme 1.

Programme 1 Monte-Carlo

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  s=s+sqrt(2/pi)*sqrt(-2*log(1-u))
}
print(s/n)
```