M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2018-2019
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`
Nom :
Prénom :

Contrôle no 2, sujet A (durée 1h45)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice..

Exercice 1. On s'intéresse au programme 1.

Programme 1 Simulation de variable aléatoire

```
simu<-function(t)
{
  b=0
  while (b==0)
  {
    u=runif(1,0,1);v=runif(1,0,1)
    x=1/v
    if (16^2*exp(-4)*u<x^2*exp(-sqrt(x)))
    { b=1 } }
  }
  return(x)
}
```

(1) Quelle est la loi des variables `x` simulées dans la boucle `while` de la fonction `simu` ?

(2) Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{Z}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x) \text{ avec } Z = \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx\,,$$

$$g(x) = \frac{\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)}{x^2}\,.$$

Montrer que pour tout $x \geq 1$,

$$f(x) \leq \frac{16^2 e^{-4}}{Z} g(x)\,.$$

(3) Quelle est la loi de la variable retournée par la fonction `simu` ?

Exercice 2. Nous définissons des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,,\; g(x) = x^2\,.$$

On s'intéresse à l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx\,.$$

(1) Comment simuler une variable de densité f ?

(2) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée, en utilisant la simulation de variable aléatoire de la question précédente.

(3) Proposer une méthode de réduction de variance par fonction d'importance (on appelle aussi cette méthode « échantillonage préférentiel»).

(4) Écrire un programme (en `R`) qui calcule I de manière approchée en utilisant méthode de la question précédente. Répondre dans le cadre ci-dessous.