Corrigé du contrôle no 2, sujet B (durée 1h45)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Soit X de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Montrons que $|X|$ est de densité ψ. Nous calculons, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(|X|)) &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(-x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
(y=-x) \quad &= \int_{+\infty}^{0} \varphi(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(-dy) + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}}dx\,.
\end{aligned}$$

(2) Nous avons, pour $X \sim \mathcal{N}(0;1)$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\psi(x)dx\,.$$

Cette dernière intégrale est convergente car $x^2 \times x^2\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, si nous tirons X_1, X_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors (par la loi des grands nombres)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

(3) Nous calculons, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$ (et $U \sim \mathcal{U}([0;1])$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(\sqrt{-2\log(1-U)})) &= \int_0^1 \varphi(\sqrt{-2\log(1-u)})du \\
(x=\sqrt{-2\log(1-u)}\,,\ u = 1-e^{-x^2/2}) \quad &= \int_0^{+\infty} \varphi(x)xe^{-x^2/2}dx\,.
\end{aligned}$$

Donc les variables `x` simulées par le programme ont une loi de densité

$$x \mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)xe^{-x^2/2}\,.$$

(4) Notons $\widetilde{f}(x) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)xe^{-x^2/2}$. Si X est de loi de densité $\widetilde{f}$, alors

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{\mathbb{R}^+} x^2e^{-x^2/2}\,.$$

Et cette dernière intégrale est convergente car $x^2 \times x^2e^{-x^2/2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par la loi des grands nombres, le programme calcule (de manière approchée),

$$J = \int_0^{+\infty} |x|\widetilde{f}(x)\,.$$

Nous remarquons que, pour $x \geq 0$,

$$|x| = \frac{\phi(x)\psi(x)}{\widetilde{f}(x)}$$

et donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)\psi(x)}{\widetilde{f}(x)} \widetilde{f}(x)dx \\ &= I\,. \end{aligned}$$

Donc le programme constitue un calcul de I avec réduction de variance par rappoart à la méthode de la question 2. Nous reconnaissons ici la méthode de la fonction d'importance (aussi appelée échantillonage préférentiel).

Exercice 2.

(1) Nous calculons, pour $x \geq 1$ (en utilisant le développement de l'exponentielle) :

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-x^{3/2})}{C} &= \frac{1}{C(1 + x^{3/2} + \frac{x^3}{2} + \dots)} \\ &\leq \frac{1}{C} \times \frac{2}{x^3}\,. \end{aligned} \tag{0.1}$$

(2) Nous pouvons calculer la fonction de répartition de g. Pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} G(x) = \int_1^x \frac{2}{t^3} dt &= \left[-\frac{1}{t^2} \right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Et nous pouvons inverser facilement cette fonction. Pour $u \in [0;1]$, $u = G(x)$ est équivalent à

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} &= 1 - u \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1-u}}\,. \end{aligned}$$

D'après le cours, nous savons que si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{1-U}}$$

est de loi de densité g.

(3) Nous utilisons une méthode d'acceptation rejet basée sur l'inégalité (0.1). Nous tirons $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ et X de densité g (indépendant de U) jusqu'à ce que

$$U \times \frac{1}{C} \times g(X) \leq f(X)\,,$$

c'est à dire

$$U \times \frac{2}{X^3} \leq e^{-X^{3/2}}\,.$$

Voir le programme 1.

Programme 1 Acceptation-rejet.

```
simu<-function(t)
{
  b=0
  while (b==0)
  {
    u=runif(1,0,1);v=runif(1,0,1)
    x=1/sqrt(1-v)
    if (u*2/(x^3)<exp(-x^(3/2))
    {b<-1}
  }
  return(x)
}
```