Université Nice Sophia-Antipolis
L3 MATHS, 2021-2022
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Analyse complexe, corrigé du contrôle no 1, sujet B

Documents et calculatrices interdits.

DURÉE : 1h30.

Exercice 1.

(1) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Nous calculons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = z_0(\overline{\lambda_1 z_1} + \overline{\lambda_2 z_2}) = \lambda_1 z_0 \overline{z_1} + \lambda_2 z_0 \overline{z_2} = \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2)$$
donc f est linéaire.

(2) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, nous avons
$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (x-iy)(x_0+iy_0) \\ &= (xx_0+yy_0) + i(-yx_0+xy_0)\,. \end{aligned}$$
Donc la matrice de f est
$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & -x_0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.

(1) Nous calculons
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2yx + i\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\,.$$
Donc
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(2yx + i - ix^2\right) = yx + \frac{(1-x^2)}{2} i\,, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(2yx + i + ix^2\right) == yx + \frac{(1+x^2)}{2} i\,. \end{aligned}$$

(2) Nous avons $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \neq 0$ donc f n'est pas holomorphe.

Exercice 3. Nous notons $f(z) = P(z) + iQ(z)$. Les équations de Cauchy-Riemann nous donnent :
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}\,,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$
Donc, puisque P est constante,
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\,.$$
Donc f est constante.

Exercice 4.

(1) Nous avons $n \to e^{-n^2}|z|^n = e^{n\log|z| = n^2}$ bornée pour tout z. Donc le rayon cherché est $+\infty$.

(2) Nous avons
$$\frac{|z|^{2n}}{n^2} = \exp(2n\ln(|z|) - 2\ln(n))\,.$$
Donc la suite $\frac{|z|^{2n}}{n^2}$ est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Donc le rayon cherché est 1.