Université Nice Sophia-Antipolis
M1 IM, 2021-2022
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Séries temporelles, contrôle no 3, sujet A

Documents et calculatrices interdits. Rendre l'énoncé avec la copie (+0,5 point !). Pour le QCM : répondre sur la copie, sans justification, une seule réponse par question, un point par réponse juste (zéro pour une réponse fausse).

DURÉE : 2h.

1. QCM (**6 points**)

(1) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est stationnaire si
- (a) Il reste autour de 0.
- (b) $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est constante.
- (c) $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ et $(\mathbb{V}(X_t))_{t\geq 0}$ sont constantes (rappel : $\mathbb{V}$=variance).
- (d) Aucune des réponses ci-dessus.

(2) On s'intéresse aux processus X vérifiant l'équation $X_t = X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \epsilon_t$ (avec (ϵ_t) bruit blanc). Est-ce qu'il existe une solution stationnaire à cette équation ?
- (a) Oui.
- (b) Non.

(3) On s'intéresse à un processus dont on a calculé les auto-corrélations et auto-corrélations partielles (empiriques) dans la Figure 1.1 Choisissez la proposition la plus probable.

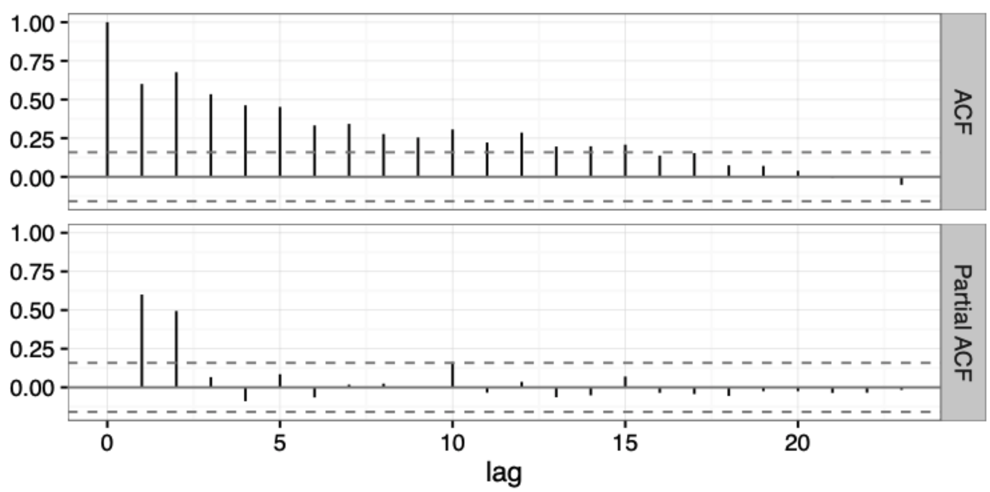

Figure 1.1. ACF et PACF

- (a) C'est un AR(2).
- (b) C'est un MA(2).
- (c) C'est un AR(10).

(4) L'auto-corrélation d'un processus est noté $h \mapsto \rho(h)$. L'auto-corrélation empirique d'un processus est notée $h \mapsto \widehat{\rho}(h)$. Laquelle des proposition suivantes est vraie ?
- (a) Pour tout h, $\widehat{\rho}(h)$ tend vers $\rho(h)$ quand le nombre d'observations tend vers l'infini.
- (b) $|\widehat{\rho}(h)| \leq |\rho(h)|$ pour tout h.

(c) $\rho = \widehat{\rho}$

(5) Sous l'hypothèse que les résidus `out$resid` sont un bruit blanc (hypothèse (H0)), une certain statistique de ces résidus doit suivre une loi du $\chi 2$. Je veux tester cette hypothèse au niveau 0.05. J'utilise la commande `R` ad hoc (`Box.test(out$resid,lag=5)`) et l'ordinateur me donne la réponse suivante `X-squared = 0.1046, df = 5, p-value = 0.9998`. Je dois

(a) garder (H0),

(b) rejeter (H0).

(6) Soit $(X_t)_{t\geq 1}$ un processus GARCH. Nous avons découvert que $(X_t^2)_{t\geq 0}$ est un ARMA(3,3). Que pouvons nous conclure ?

(a) (X_t) est un GARCH(3,3).

(b) (X_t) est un GARCH(0,3).

(c) Aucune des réponses ci-dessus.

2. Exercices

(1) (**7 points**) On s'intéresse à un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie l'équation :

$$X_t = \frac{X_{t-1}}{2} + Z_t$$

avec Z_t de loi $\mathcal{N}(0;1)$ (les Z_t sont i.i.d. et pour tout t, Z_t est indépendant de X_t). Nous avons observé X_1, X_3 et nous avons raté X_2. Nous aimerons trouver un estimateur $\widehat{X}_2$ tel que $\mathbb{E}((X_2 - \widehat{X}_2)^2)$ est le plus petit possible. Cet estimateur a la forme : $\widehat{X}_2 = a_1X_1 + a_3X_3$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ pour tout t. Nous noterons dans la suite $\mathbb{E}(X_t^2) = \sigma^2$, pour tout t.

(b) Calculer σ^2.

(c) Trouver a_1 et a_3 tels que $\mathbb{E}((X_2 - \widehat{X}_2)^2)$ soit le plus petit possible.

(d) Quelle est la valeur du minimum atteint par $\mathbb{E}((X_2 - \widehat{X}_2)^2)$?

(2) (**7 points**) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus MA(1) d'équation

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$$

avec des Z_t i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\rho(1)$ (ρ est la fonction de corrélation du processus (X_t)).

(b) Trouver la valeur θ^* pour θ telle que $\rho(1)$ soit le plus grand possible.

(c) Calculer la fonction de covariance du processus (nous la noterons σ).

(d) Calculer la densité spectrale de (X_t) pour $\theta = \theta^*$. Rappel : la densité spectrale est la fonction

$$f \,:\, \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-ih\lambda}\sigma(h)\,.$$