Université Nice Sophia-Antipolis
M1 IM, 2021-2022
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Séries temporelles, CORRIGÉ du contrôle no 3, sujet B

Documents et calculatrices interdits. Rendre l'énoncé avec la copie (+0,5 point!). Pour le QCM : répondre sur la copie, sans justification, une seule réponse par question, un point par réponse juste (zéro pour une réponse fausse).

DURÉE : 2h.

1. QCM (**6 points**)

(1) (b) (Définition 3.2).
(2) (a) (Voir proposition 4.3).
(3) (a) (Voir section 1.2).
(4) (a) (Voir section 4.5).
(5) (a).
(6) (a) (Voir section 6.2).

2. Exercices

(1) (**7 points**)

(a) Nous calculons (car le processus est stationnaire et centré), pour tout t :

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= \mathbb{E}(X_t^2) \\ &= \mathbb{E}((\frac{Z_t}{\theta} + Z_{t-1})^2) \\ &= \frac{1}{\theta^2} + 1\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+1}) \\ &= \mathbb{E}((\frac{Z_t}{\theta} + Z_{t-1})(\frac{Z_{t+1}}{\theta} + Z_t)) \\ &= 0 + \frac{1}{\theta}\mathbb{E}(Z_t^2) \\ &= \frac{1}{\theta}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\rho(1) = \frac{\sigma(1)}{\sigma(0)} = \frac{(1/\theta)}{1 + (1/\theta^2)} = \frac{\theta}{\theta^2 + 1}\,.$$

(b) Nous étudions la fonction

$$g\,:\,\theta \in \mathbb{R} \mapsto g(\theta) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}\,.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \frac{(1+\theta^2) - 2\theta.\theta}{(1+\theta^2)^2} \\ &= \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}\,.\end{aligned}$$

En remarquant que g est impaire, nous construisons facilement son tableau de variation (voir Tableau 1).

(c) Pour $h \geq 2$, $\sigma(h) = 0$. Nous avons déjà calculé $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$.

θ	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(\theta)$		-		+		+		-	
$g(\theta)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

TABLE 1. Tableau de variation.

(d) Nous calculons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i\lambda}+e^{-i\lambda}}{2}\times\theta^* + 1\times(1+(\theta^*)^2)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(1+(\theta^*)^2)\left(\cos(\lambda)\frac{\theta^*}{1+(\theta^*)^2}+1\right) \\ &= \frac{1+\cos(\lambda)}{\pi}\,. \end{aligned}$$

(2) (**7 points**)

(a) Puisque le processus est stationnaire, nous avons pour tout t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= -\frac{\mathbb{E}(X_t)}{2}+0 \\ \mathbb{E}(X_t) &= 0\,. \end{aligned}$$

(b) Nous calculons (en utilisant la stationnarité)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= \frac{\mathbb{E}(X_{t-1}^2)}{4}+\mathbb{E}(Z_t^2) \\ \frac{3}{4}\mathbb{E}(X_t^2) &= 1 \\ \sigma^2 &= \frac{4}{3}\,. \end{aligned}$$

(c) Nous calculons

$$\begin{aligned} X_2-\widehat{X}_2 &= -\frac{X_1}{2}+Z_2-a_1X_1-a_3\left(-\frac{X_2}{2}+Z_3\right) \\ &= -\frac{X_1}{2}+Z_2-a_1X_1+\frac{a_3}{2}\left(-\frac{X_1}{2}+Z_2\right)-a_3Z_3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}-a_1-\frac{a_3}{4}\right)X_1+\left(1+\frac{a_3}{2}\right)Z_2-a_3Z_3, \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}((X_2-\widehat{X}_2)^2) = \left(-\frac{1}{2}-a_1-\frac{a_3}{4}\right)^2\sigma^2+\left(1+\frac{a_3}{2}\right)^2+a_3^2\,.$$

Le trinôme en a_3 : $\left(1+\frac{a_3}{2}\right)^2+a_3^2$ est minimal pour $a_3=2/5$ (on s'en aperçoit en calculant la dérivée). La quantité $\left(-\frac{1}{2}-a_1-\frac{a_3}{4}\right)^2$ est minimale pour $a_1=-\frac{a_3}{4}-\frac{1}{2}$. Donc les coefficients cherchés sont :

$$\begin{cases} a_1=-\frac{3}{5}, \\ a_3=\frac{2}{5}. \end{cases}$$

(d) Pour ces valeurs, nous avons :

$$\mathbb{E}((X_2-\widehat{X}_2)^2)=0+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{40}{25}=\frac{8}{5}\,.$$