Université Nice-Sophia Antipolis
SLUMA602 - UE Analyse complexes, 2022-2023
Sylvain Rubenthaler (`https://math.unice.fr/~rubentha/`)

Corrigé du contrôle 01 (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits (sauf polycopié). La plus grande importance a été accordée accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le barème est en rouge.

Exercice 1.

(1) [3]
— Si $z^2 = Z$ alors : nous écrivons $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) et nous avons

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & \sqrt{3}, \\ 2xy & = & 1, \\ x^2 + y^2 & = & 2. \end{cases}$$

Donc

$$x^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\, y^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

De plus, x et y sont de même signe (car $2xy = 1$) donc

$$z \in \mathcal{A} := \left\{ \alpha \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} + i\alpha \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} \,:\, \alpha \in \{-1; +1\} \right\}.$$

— Inversement, si $z \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{3} + i\,. \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble cherché est $\mathcal{A}$.

(2) [2] Nous avons : $|Z| = (3 + 1^2)^{1/2} = 2$, $Z = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$. Il devient alors plus facile d'écrire les éléments de $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \{\sqrt{2}e^{i\pi/12}, -\sqrt{2}e^{i\pi/12}\}$.

(3) [2] Et donc $\cos(\pi/12) = \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2}$.

Exercice 2.

(1) [2] COURS

(2) [2] Nous avons une série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \frac{n+1}{n+1} \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ \text{(équivalent de } ln) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1\,. \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence cherché est $1/e$.

Exercice 3.

(1) [2] COURS

(2) [2] $1/2$ est un point d'accumulation de la suite $(1/2 - 1/n)_{n\geq 1}$. Donc, par le théorème des zéros isolés, f' est nulle. Et donc f est constante. Donc $f(0) = 2$.

Exercice 4.

(1) [3] Par la formule de Cauchy, pour tout $r \in]0;1[$:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^2}dw\,.$$

Par changement de variable ($t = u + \pi$), nous avons aussi

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(-re^{iu})}{-re^{iu}}du = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \frac{f(-w)}{w}dw\,.$$

Donc

$$f'(0) = \frac{1}{2}\int_{C(0,r)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2}dw\,.$$

(2) [2] Nous avons donc, $\forall r \in]0;1[$,

$$\begin{aligned} 2|f'(0)| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})-f(-re^{it})}{(re^{it})^2} ire^{it}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{r}dt \\ &= \frac{d}{r}\,. \end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $r \in]0;1[$ donc

$$2|f'(0)| \leq d\,.$$