Université Nice-Sophia Antipolis
SLUMA602 - UE Analyse complexes, 2022-2023
Sylvain Rubenthaler (`https://math.unice.fr/~rubentha/`)

Contrôle 01 (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits (sauf polycopié). La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $Z = \sqrt{3} + i$.

(1) Trouver l'ensemble $\mathcal{A}$ des z de $\mathbb{C}$ tels que $z^2 = Z$. Pour cela, on écrira $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) et on résoudra en x, y. (Indication : on connaît la partie réelle de z^2, sa partie imaginaire et aussi son module.)

(2) On rappelle que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/6) = 1/2$. Mettre Z sous la forme $Z = Re^{i\theta}$ (R et θ dans $\mathbb{R}$). Faire de même pour les éléments de $\mathcal{A}$.

(3) En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$.

Exercice 2.

(1) Énoncer un critère de calcul du rayon de convergence d'une série entière.

(2) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Exercice 3.

(1) Énoncer le théorème des zéros isolé.

(2) Soit f holomorphe sur le disque $D(0,1)$, telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$f'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = 0$$

et telle que $f(1/2) = 2$. Déterminer $f(0)$.

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $D(0,1)$. On appelle diamètre de f la quantité

$$d = \sup_{w,z \in D(0,1)} |f(z) - f(w)|$$

(qui peut être infinie).

(1) Démontrer que $2f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w) - f(-w)}{w^2} dw$, pour tout r de $]0;1[$. $C(0,r)$ est le cercle de centre 0 et de rayon r. (Indication : utiliser le thérème de Cauchy pour exprimer $f'(0)$ à l'aide d'une intégrale sur f.)

(2) En déduire que $2|f'(0)| \leq d$.