CORRIGÉS POUR LE CHAPITRE 3

Exercice 1.

(1) On utilise l'estimateur de la variance introduit au chapitre 1.

(2) Posons $g(x) = \mathbb{1}_{x>0}e^{\beta x}$, $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Nous remarquons que
$$g(x)f(x) = \frac{\mathbb{1}_{x>0}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) .$$
Nous utilisons les mêmes notations que dans le cours et prenons
$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) .$$
Nous avons
$$\frac{\widetilde{f}(x)}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(y)dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2\right)$$
(c'est la densité de $\mathcal{N}(\beta, 1)$, suivant laquelle nous savons simuler).

(3) Nous avons
$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}(g(X)) \\ &= \mathbb{E}(g(X) - h(X)) + \mathbb{E}(h(X)) \end{aligned}$$
avec $h(x) = e^{\beta x}$ et
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X)) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2} + \beta x\right)}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) . \end{aligned}$$

(4) Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $-X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Donc
$$\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(-X)) = \mathbb{E}\left(\frac{g(X) + g(-X)}{2}\right) .$$
On en déduit une nouvelle méthode de Monte-Carlo pour approcher l'espérance (voir le programme).

Exercice 2.

(1) On approche
$$I = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|u|} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du .$$

(2) Voir le programme.

(3) On sait calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &= \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= 2\left[-\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^{+\infty} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.\end{aligned}$$

Nous proposons donc une méthode de variable de contrôle avec $h(x) = |x|$.

(4) Voir le programme (la variance est bien réduite).

Exercice 3.

(1)

(a) Nous avons $p_l = \mathbb{E}(Y)$ avec $Y = \mathbb{1}_{[l;l+1]}(X)$. Si nous tirons Y_1, Y_2, … i.i.d. de même loi que Y, alors

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} p_l\,.$$

Voir le programme pour la mise en œuvre.

(b) Voir le programme pour une approximation de la variance par Monte-Carlo. On demande ici un calcul explicite. Puisque Y est de loi $\mathcal{B}(p)$, on calcule facilement : $\mathbb{V}(Y) = p_l(1-p_l)$ (voir cours de licence).

(2)

(a) Prenons

$$\widetilde{f}_1(x) = e^{-l}\mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)\,.$$

Cette fonction est proche de $x \mapsto e^{-x}\mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)$. Nous avons

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\widetilde{f}_1(x)}{\int_u \widetilde{f}_1(u)du} = \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)\,,$$

qui est la densité de la loi uniforme sur $[l; l+1]$. Si nous tirons Z_1, Z_2, … i.i.d. de loi uniforme sur $[l; l+1]$, nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-Z_i}\mathbb{1}_{[l;l+1]}(Z_i)}{\widetilde{f}(Z_i)} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} p_l\,.$$

Voir le programme pour la mise en œuvre.

(b) Voir le programme pour un calcul approché. Et voir ci-dessous pour le calcul exact (vu l'énoncé, on veut un calcul exact).

(c) On peut calculer les espérances :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X)^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X)) \\ &= p_l\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((e^{-Z_1})^2) &= \mathbb{E}(e^{-2Z_1}) \\ &= \int_l^{l+1} e^{-2x}dx \\ &= \frac{e^{-2l}-e^{-2(l+1)}}{2}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{V}(\mathbb{1}_{[l;l+1]}(X)) = p_l - p_l^2 = p_l(1-p_l)\,,$$

$$\mathbb{V}(e^{-Z_1}) = \frac{e^{-2l}-e^{-2(l+1)}}{2} - p_l^2\,.$$

De plus :

$$p_l = \int_l^{l+1} e^{-x}dx = e^{-l} - e^{-(l+1)}\,.$$

On regarde le rapport des deux variances (et on multiplie par e^{-l} en haut et en bas)

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{e^{-2l}-e^{-2l-2}}{2}\right) - \left(e^{-l}-e^{-l-1}\right)^2}{(e^{-l}-e^{-l-1}) - (e^{-l}-e^{-l-1})^2} &= \frac{\left(\frac{e^{-l}-e^{-l-2}}{2}\right) - (1-e^{-1})(e^{-l}-e^{-l-1})}{(1-e^{-1}) - (1-e^{-1})(e^{-l}-e^{-l-1})} \\ &\underset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.\end{aligned}$$

On recommence ensuite avec $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. On cherche une fonction d'importance $\widetilde{f}$ dont le profil ressemble à celui de $x \mapsto \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)\exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$. Dans le programme, on fait deux essais :

$$\widetilde{f}_1(x) = \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x)\,,$$

$$\widetilde{f}_2(x) = \mathbb{1}_{[l;l+1]}(x) \times \frac{e^{-x}}{e^{-l}-e^{-l-1}}\,.$$

La fonction $\widetilde{f}_2$ a l'air mieux adapté et en effet, on constate que la variance de la méthode d'échantillonage d'importance avec $\widetilde{f}_2$ est environ la moitié de celle avec $\widetilde{f}_1$.

Exercice 4. (1) On sait que la probabilité d'accepter dans la méthode du rejet est $1/M$. Quelque soit i, pour parvenir à simuler X_i de densité p par la méthode du rejet, on fait N_i boucles avec N_i qui suit la loi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ \mathbb{P}(N_i = k) = \left(1-\frac{1}{M}\right)^{k-1}\frac{1}{M}$$

(c'est un résultat du cours). Nous avons

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$$

et les N_i sont indépendants. Si on note g la loi des N_i, la loi de N est $g * g * \cdots * g$ (convolée n fois). C'est à dire

$$\begin{aligned}
\forall m \geq n \,,\, \mathbb{P}(N=m) &= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}^*)^n} \mathbb{1}_{k_1+\cdots+k_n=m} \prod_{i=1}^{n} \left(1-\frac{1}{M}\right)^{k_i-1} \frac{1}{M} \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}^*)^n} \mathbb{1}_{k_1+\cdots+k_n=m} \left(1-\frac{1}{M}\right)^{m-n} \left(\frac{1}{M}\right)^{n} \\
&= \#\{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}^*)^n \,:\, k_1+\cdots+k_n=m\} \times \left(1-\frac{1}{M}\right)^{m-n} \left(\frac{1}{M}\right)^{n} \\
&= C_{m-1}^{n-1} \left(1-\frac{1}{M}\right)^{m-n} \left(\frac{1}{M}\right)^{n} .
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient d'un résultat classique de dénombrement.

(2) On calcule, pour une fonction $\varphi \in C_b^+(\mathbb{R})$, avec Y et U indépendantes, $Y \sim q$, $U \sim \mathcal{U}([0;1])$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(Y)\mathbb{1}_{U\times Cq(Y)>p(Y)}) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\left(1-\frac{p(y)}{Cq(y)}\right) q(y)dy \\
&= \mathbb{E}(\varphi(Y)) - \frac{1}{C}\mathbb{E}(\varphi(X)) \,,
\end{aligned}$$

avec $X \sim p$. Donc

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)|U\times Cq(Y)>p(Y)) = \frac{\mathbb{E}(\varphi(Y)) - \frac{1}{C}\mathbb{E}(\varphi(X))}{1-\frac{1}{C}} .$$

Donc la loi de Y conditionnellement à « Y rejeté » est de densité

$$y \mapsto f(y) = \frac{q(y)-\frac{p(y)}{C}}{1-\frac{1}{C}} .$$

Conditionnellement à $N=n+p$, $Z_1,\dots,Z_{N-n}$ sont p variables indépendantes de densité f.