

CHAPITRE 2 : FRACTIONS CONTINUES

1. FRACTIONS CONTINUES FINIES

Une *fraction continue finie* est une fraction itérée du genre

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}, \qquad -1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7 + \frac{1}{9}}}}}$$

La forme générale est

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{N-1} + \frac{1}{a_N}}}}} \tag{1}$$

Les a_i sont les *quotients partiels* ou parfois tout simplement les *quotients* de la fraction continue.

Nous nous intéressons aux fractions continues dites *simples* où tous les numérateurs sont des 1, les quotients partiels a_i sont entiers, et en plus $a_i \geq 1$ pour $i \geq 1$. (Mais a_0 est un entier de signe quelconque.)

Mais il est convenable parfois de permettre les a_i à être des réels ou des variables ou des fonctions ou autre chose.

La notation ci-dessus n'est pas très compacte, et parfois elle est remplacée par

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{a_{N-1} +} \frac{1}{a_N} \qquad \text{ou} \qquad [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N]$$

ou des variations. Dans le dernier système de notations, les deux fractions continues tout en haut sont $[1, 2, 1, 2, 1, 2]$ et $[-1, 1, 3, 5, 7, 9]$.

2. EVALUATION D'UNE FRACTION CONTINUE FINIE

On évaluera la fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$ de (1) en trouvant une formule récursive évaluant ses troncations

$$a_0, \qquad a_0 + \frac{1}{a_1}, \qquad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \qquad \text{etc.}$$

Théorème 2.1. *Définissons*

$$\begin{aligned} p_{-2} &= 0, & p_{-1} &= 1, & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{pour } n \geq 0, \\ q_{-2} &= 1, & q_{-1} &= 0, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{pour } n \geq 0, \end{aligned}$$

Alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Définition 2.2. Les fractions $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ s'appellent les *réduites* de la fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. En anglais on dit “*convergents*”.

Exemple 2.3. Pour évaluer les fractions continues $[1, 2, 1, 2, 1, 2]$ et $[-1, 1, 3, 5, 7, 9]$ ci-dessus, on utilise les tableaux suivants, qui ressemblent à ceux de l’algorithme d’Euclide étendu.

a_i			1	2	1	2	1	2
p_i	0	1	1	3	4	11	15	41
q_i	1	0	1	2	3	8	11	30

a_i			-1	1	3	5	7	9
p_i	0	1	-1	0	-1	-5	-36	-329
q_i	1	0	1	1	4	21	151	1380

Donc on a $[1, 2, 1, 2, 1, 2] = \frac{41}{30}$ et ses réduites sont $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \frac{41}{30}$, c’est à dire

$$\begin{aligned} 1 &= 1, & 1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}, & 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} &= \frac{4}{3}, & 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} &= \frac{11}{8}, \\ & & 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} &= \frac{15}{11}, & 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} &= \frac{41}{30}. \end{aligned}$$

On a $[-1, 1, 3, 5, 7, 9] = -\frac{329}{1380}$, et ses réduites sont $-1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{21}, -\frac{36}{151}, -\frac{329}{1380}$.

Preuve du théorème 2.1. On fait une récurrence d’ordre 2 sur n .

Pour $n = 0$ on a $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$.

Pour $n = 1$ on a $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$.

Donc les deux cas initiaux sont vérifiés.

Maintenant supposons $n \geq 2$, et qu'on a $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = [a_0, \dots, a_{n-2}]$ et $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}]$ quelquesoit les valeurs de a_0, \dots, a_{n-1} . Or la fraction continue

$$[a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

s'obtient en prenant

$$[a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + a_{n-1}}}$$

et en remplaçant a_{n-1} par $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$. C'est à dire on a

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] &= [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}] \\ &= \frac{p_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n})}{q_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n})} \\ &= \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + q_{n-3}} \\ &= \frac{a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3} + \frac{1}{a_n}p_{n-2}}{a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3} + \frac{1}{a_n}q_{n-2}} \\ &= \frac{p_{n-1} + \frac{1}{a_n}p_{n-2}}{q_{n-1} + \frac{1}{a_n}q_{n-2}} \\ &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 2.4. (a) On a $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ pour $n \geq 0$.

(b) On a $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ pour $n \geq 1$.

Preuve. (a) Pour $n = 0$ c'est $p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$. Pour $n \geq 1$, on suppose par récurrence qu'on a $p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^{n-2}$, et on trouve

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} = -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

(b) En utilisant le (a), on a

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^n a_n. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 2.5. Supposons qu'on a une fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ simple, c'est à dire que a_0 est entier, et $a_i \geq 1$ est entier et strictement positif pour $i \geq 1$. Alors dans chaque fraction $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n]$, le numérateur p_n et le dénominateur q_n sont des entiers premiers

entre eux. De plus la suite des dénominateurs $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \dots$ est strictement croissante après q_1 , et on a

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}},$$

Preuve. Il est clair des formules de récurrence que si les a_n sont tous entiers, alors les p_n et q_n sont entiers aussi. La formule $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ donne alors une relation de Bezout montrant que p_n et q_n sont premiers entre eux. En utilisant les relations $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, et $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ pour $n \geq 2$, on montre par récurrence qu'on a $q_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. Puis on a $q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Les valeurs de $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et de $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ se calculent en utilisant le théorème 2.4. \square

3. LA FRACTION CONTINUE D'UN RATIONNEL

Pour ξ un réel, on définit une suite de réels ξ_n et une suite d'entiers a_n par récurrence $\xi_0 = \xi$, et pour $n \geq 0$

$$\xi_n = \begin{cases} a_n & \text{si } \xi_n \text{ est entier,} \\ a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} & \text{avec } a_n \text{ entier et } \xi_{n+1} > 1, \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

C'est à dire, on a $a_n = [\xi_n]$, la partie entière de ξ_n , et $\frac{1}{\xi_{n+1}} = \xi_n - [\xi_n]$, la partie fractionnelle de ξ_n , tant que ceci est non nulle. On a

$$\xi = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\xi_3}}} = \dots$$

et en général

$$\xi = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \xi_n]. \quad (3)$$

Si un ξ_n est entier, on s'arrête avec $\xi_n = a_n$. Sinon, on continue.

Les *réduites* de ξ sont les réduites de la fraction continue finie ou infinie $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.

Exemple 3.1. Les fractions continues des rationnels $\frac{31}{22}$ et $-\frac{4}{15}$ se calculent comme suit :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{31}{22} = 1 + \frac{9}{22}, & \xi_0 &= -\frac{4}{15} = -1 + \frac{11}{15}, \\ \xi_1 &= \frac{22}{9} = 2 + \frac{4}{9}, & \xi_1 &= \frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11}, \\ \xi_2 &= \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}, & \xi_2 &= \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}, \\ \xi_3 &= \frac{4}{1} = 4, & \xi_3 &= \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \\ & & \xi_4 &= \frac{3}{1} = 3. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{31}{22} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}, \quad -\frac{4}{15} = -1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}.$$

Quand ξ est rationnel, on peut écrire $\xi = \frac{u}{v}$ avec u et $v > 0$ entiers. L'algorithme (2) donne

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{u}{v} = a_0 + \frac{u_0}{v} && \text{avec } 0 \leq u_0 < v, \\ \xi_1 &= \frac{v}{u_0} = a_1 + \frac{u_1}{u_0} && \text{avec } 0 \leq u_1 < u_0, \\ &\vdots \\ \xi_{N-1} &= \frac{u_{N-3}}{u_{N-2}} = a_{N-1} + \frac{u_{N-1}}{u_{N-2}} && \text{avec } 0 \leq u_{N-1} < u_{N-2}, \\ \xi_N &= \frac{u_{N-2}}{u_{N-1}} = a_N. \end{aligned}$$

Si on multiplie chaque équation par le dénominateur des fractions, on retrouve les équations $u = a_0v + u_0$, $v = a_1u_0 + u_1$, \dots , etc., de l'algorithme d'Euclide. Donc quand on applique l'algorithme (2) à un rationnel $\frac{u}{v}$, on fait l'algorithme d'Euclide, sauf que les sorties de l'algorithme sont les quotients entiers a_i des divisions successives, qui deviennent les quotients partiels de la fraction continue de $\frac{u}{v}$.

Théorème 3.2. *Pour u et $v > 0$ entiers, l'algorithme d'Euclide étendu calcule les quotients partiels de la fraction continue de $\frac{u}{v} = [a_0, a_1, \dots, a_N]$ et les réduites $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_N}{q_N}$ de cette fraction continue.*

En particulier, on a $\frac{p_N}{q_N} = \frac{u}{v}$ mais avec $\text{pgcd}(p_N, q_N) = 1$. C'est à dire, $\frac{p_N}{q_N}$ est la forme réduite (ou simplifiée) de $\frac{u}{v}$.

4. FRACTIONS CONTINUES INFINIES

Supposons qu'on a une fraction continue infinie

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

La suite de ses réduites

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0], \quad \frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1], \quad \dots \quad \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n], \quad \dots$$

est convergente, selon le théorème suivant. La *valeur* de la fraction continue infinie est cette limite.

Théorème 4.1. Soit a_0 un entier relatif, et a_1, a_2, \dots des entiers strictement positifs. Alors la suite de réduites $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ de la fraction continue infinie $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ a les propriétés suivantes.

- (a) La sous-suite des réduites paires $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \dots$ est strictement croissante.
- (b) La sous-suite des réduites impaires $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \dots, \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}, \dots$ est strictement décroissante.
- (c) Toute réduite paire est plus petite que toute réduite impaire.
- (d) Si la suite des réduites est infinie, elle a une limite ξ .

On peut écrire (a)(b)(c) sous la forme

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Par exemple, les premières réduites de $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$ sont

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1.000000000000000000000000 \\ \frac{3}{2} &= 1.500000000000000000000000 \\ \frac{8}{5} &= 1.600000000000000000000000 \\ \frac{21}{13} &= 1.615384615384615384615384615 \\ \frac{55}{34} &= 1.617647058823529411764705882 \\ \frac{144}{89} &= 1.617977528089887640449438202 \\ &\vdots \\ \text{limite } \alpha &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894848204586834 \\ &\vdots \\ \frac{233}{144} &= 1.6180555555555555555555555555 \\ \frac{89}{55} &= 1.61818181818181818181818181818 \\ \frac{34}{21} &= 1.619047619047619047619047619 \\ \frac{13}{8} &= 1.6250000000000000000000000000 \\ \frac{5}{3} &= 1.6666666666666666666666666666 \\ \frac{2}{1} &= 2.0000000000000000000000000000 \end{aligned}$$

Preuve. (a) (b) Selon le théorème 2.5, on a

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} = \frac{a_{2n}}{q_{2n}q_{2n-2}} > 0, \quad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = -\frac{a_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} < 0.$$

Donc on a toujours $\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ et $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$

(c) Selon le même théorème pour tout entier impair $2n - 1$ on a

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} = \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n-2}} > 0, \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = -\frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}} < 0.$$

Donc on a $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$ et $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$. Chaque réduite impaire est plus grande que les réduites paires l'entourant immédiatement.

Or soit $\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$ une réduite paire quelconque. On a soit $2m \leq 2n - 2$ soit $2m \geq 2n$. Dans le premier cas, on a $\frac{p_{2m}}{q_{2m}} \leq \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$. Dans le deuxième cas on a $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \geq \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} > \frac{p_{2m}}{q_{2m}}$. Dans les deux cas on a $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2m}}{q_{2m}}$.

(d) La suite des réduites paires est strictement croissante et bornée supérieurement par toutes les réduites impaires. Elle a donc une limite $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \rightarrow \xi_{\text{pair}}$ vérifiant $\xi_{\text{pair}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ pour tout impair $2n - 1$. Similairement la suite des réduites est décroissante et bornée inférieurement par toutes les réduites paires, donnant une limite $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \rightarrow \xi_{\text{impair}}$ avec $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \xi_{\text{impair}}$ pour tout pair $2n$. Comme ces limites sont le suprémum des réduites paires et l'infimum des réduites impaires, on a aussi $\xi_{\text{pair}} \leq \xi_{\text{impair}}$. On a donc

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \xi_{\text{pair}} \leq \xi_{\text{impair}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

On a donc

$$|\xi_{\text{impair}} - \xi_{\text{pair}}| \leq \left| \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \right| = \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n}} \leq \frac{1}{(2n-1)(2n)} \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$, car on a $q_m \geq m$ pour tout m . Donc on a $\xi_{\text{pair}} = \xi_{\text{impair}}$, et la suite a une limite. \square

Dans la direction opposée, on peut associer une fraction continue à un irrationnel ξ par le même **algorithme de fractions continues** que pour les rationnels. On pose $\xi_0 = \xi$, puis pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$ on pose

$$a_n = [\xi_n] \text{ la partie entière,} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n} \iff \xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}. \quad (4)$$

Pour ξ irrationnel, tous les ξ_n sont tous irrationnels, donc la suite a_0, a_1, a_2, \dots est infinie. On a toujours $0 \leq \xi_n - a_n < 1$ d'où $0 < \frac{1}{\xi_{n+1}} < 1$ et $\xi_{n+1} > 1$ et $a_{n+1} = [\xi_{n+1}] \geq 1$. Donc tous les a_n sont strictement positifs sauf peut-être a_0 . Donc associé à ξ on a une fraction continue infinie $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ comme dans le théorème 4.1.

Lemme 4.2. Soit ξ un réel, soit $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ la suite de réels et a_0, a_1, a_2, \dots la suite d'entiers associés à ξ par la procédure (4) ci-dessus, et soit $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ la suite de réduites de la fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Alors on a

$$\xi = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}}, \quad \frac{p_n}{q_n} - \xi = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n \xi_{n+1} + q_{n-1})}. \quad (5)$$

Preuve. Parce qu'on a

$$\xi = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \dots \quad \xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}},$$

On a

$$\xi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}]$$

Donc si on applique les formules qui calculent les réduites à la fraction continue $[a_0, a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}]$, ses réduites sont $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ et

$$\xi = \frac{\bar{p}_{n+1}}{\bar{q}_{n+1}} = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Ceci démontre la première formule. Pour la deuxième on a par le théorème 2.5

$$\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\bar{p}_{n+1}}{\bar{q}_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n \bar{q}_{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n (q_n \xi_{n+1} + q_{n-1})}. \quad \square$$

Théorème 4.3. Soit ξ un réel, $[a_0, a_1, a_n, \dots]$ sa fraction continue associée par la procédure (4), et $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ les réduites de la fraction continue. Alors on a

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \xi \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

En particulier, si ξ est irrationnel, on a $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \xi$ quand $n \rightarrow \infty$; les réduites de la fraction continue de ξ tendent vers ξ .

Preuve. En appliquant le lemme on a

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \xi \right| = \frac{1}{q_n (\xi_{n+1} q_n + q_{n-1})}.$$

Mais on a $\xi_{n+1} \geq a_{n+1}$ et $q_n > 0$ et $q_{n-1} > 0$ et $a_{n+1} \geq 1$, d'où

$$\xi_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq a_{n+1} q_n + q_{n-1} = q_{n+1} > a_{n+1} q_n \geq q_n.$$

En multipliant ces inégalités par q_n et en prenant les réciproques, on trouve les inégalités du théorème. Finalement, comme on a $q_n \geq n$ pour tout n , on a $\left| \frac{p_n}{q_n} - \xi \right| < \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$. \square

Par exemple le début de la fraction continue de π est $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$. Ses premières réduites sont

$$\begin{aligned} \frac{3}{1} &= 3.000000000000000000000000000000, & \frac{3}{1} - \pi &= -0.1415926535897932384626433832, \\ \frac{333}{106} &= 3.141509433962264150943396226, & \frac{333}{106} - \pi &= -0.00008321962752908751924715684090, \\ \frac{103993}{33102} &= 3.141592653011902604072261494, & \frac{103993}{33102} - \pi &= -0.0000000005778906343903818884, \\ \pi &= 3.141592653589793238462643383, \\ \frac{355}{113} &= 3.141592920353982300884955752, & \frac{355}{113} - \pi &= 0.0000002667641890624223123689082593, \\ \frac{22}{7} &= 3.142857142857142857142857142, & \frac{22}{7} - \pi &= 0.001264489267349618680213759588, \end{aligned}$$

La formule $\left| \frac{p_n}{q_n} - \pi \right| < \frac{1}{q_n^2}$ signifie que quand $q_n \approx 10^r$, alors les représentations décimales de $\frac{p_n}{q_n}$ et de π coïncident pendant $2r$ chiffres après le virgule. On voit cela bien avec $\frac{333}{106}$ (4 chiffres) et $\frac{103993}{33102}$ (9 chiffres). Mais l'inégalité raffinée $\left| \frac{p_n}{q_n} - \pi \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$ indique que l'approximation est particulièrement bonne quand le prochain quotient partiel est grand. On voit cela d'abord pour $\frac{22}{7}$ où l'erreur est plus proche de $\frac{1}{1000}$ que de $\frac{1}{50}$, et surtout pour $\frac{355}{113}$, où l'erreur est plus proche de 10^{-6} que de 10^{-4} .

On a aussi $\xi_{n+1} < a_{n+1} + 1$ et $q_{n-1} \leq q_n$, d'où

$$\xi_{n+1}q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} = q_{n+1} + q_n \leq (a_{n+1} + 2)q_n$$

et donc des minoration

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \xi \right| > \frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} \geq \frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2}.$$

Donc pour qu'une réduite $\frac{p_n}{q_n}$ de ξ soit exceptionnellement proche de ξ , il faut et il suffit que le prochain quotient partiel a_{n+1} soit exceptionnellement grand.

Théorème 4.4. *Soit ξ un réel et $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ sa fraction continue obtenue par l'algorithme (4).*

Si ξ est irrationnel, alors $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ est la seule fraction continue de valeur ξ .

Si ξ est rationnel, alors $[a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N]$ et $[a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N - 1, 1]$ sont les deux seules fractions continues de valeur ξ .

La preuve est par récurrence, et utilise sur deux lemmes.

Lemme 4.5. *Soit $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ une fraction continue de valeur ξ . Si ξ n'est pas entier, alors $a_0 = [\xi]$. Si $\xi = m$ est entier, alors $[a_0, a_1, \dots]$ est $[m]$ ou $[m - 1, 1]$.*

Preuve. La fraction continue peut avoir 4 formes : $[a_0]$, $[a_0, 1]$, $[a_0, a_1]$ avec $a_1 \geq 2$, et $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.

Dans les deux premiers cas, $\xi = m$ est entier, et la fraction continue est $[m]$ ou $[m - 1, 1]$.

Dans le troisième cas, on a $\xi = a_0 + \frac{1}{a_1}$ avec $a_1 \geq 2$, d'où un encadrement $a_0 < \xi \leq a_0 + \frac{1}{2} < a_0 + 1$. Donc ξ est non entier et $[\xi] = a_0$.

Dans le quatrième cas, par le théorème 4.1 toutes les réduites paires sont plus petites que ξ , et toutes les réduites impaires sont plus grandes que ξ , avec égalité seulement quand ξ est

rationnel et la réduite est la dernière et vaut ξ . Or dans ce cas $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ ne sont pas les dernières réduites, donc on a $a_0 = \frac{p_0}{q_0} < \xi < \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} \leq a_0 + 1$. D'où ξ est encore non entier, et $[\xi] = a_0$. \square

Lemme 4.6. Soit $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ une fraction continue de valeur ξ , et soit $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ ses réduites. Soit ξ_{n+1} l'unique réel avec $\xi = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}}$. Alors $[a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$ est de valeur ξ_{n+1} .

Preuve. Pour une fractions continue finie

$$a_0 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n + \boxed{a_{n+1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+m}}}}}} \tag{6}$$

on peut traiter la partie emboîtée comme un seul nombre $[a_{n+1}, \dots, a_{n+m}] = \frac{h_m}{k_m}$. On a donc

$$\frac{p_{n+m}}{q_{n+m}} = [a_0, \dots, a_{n+m}] = [a_0, \dots, a_n, \frac{h_m}{k_m}] = \frac{\frac{h_m}{k_m} p_n + p_{n-1}}{\frac{h_m}{k_m} q_n + q_{n-1}} \tag{7}$$

On peut résoudre l'équation $\xi = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}}$ et l'équation (7) pour trouver

$$\xi_{n+1} = -\frac{q_{n-1} \xi - p_{n-1}}{q_n \xi - p_n} \qquad \frac{h_m}{k_m} = -\frac{q_{n-1} \frac{p_{n+m}}{q_{n+m}} - p_{n-1}}{q_n \frac{p_{n+m}}{q_{n+m}} - p_n} \tag{8}$$

Comme les réduites $\frac{p_{n+m}}{q_{n+m}}$ de $[a_0, a_1, \dots]$ tendent vers ξ , les réduites $\frac{h_m}{k_m}$ de $[a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$ tendent vers ξ_{n+1} . \square

Preuve du théorème 4.4. On distingue deux cas : ξ irrationnel et ξ rationnel.

D'abord traitons le cas d'un ξ irrationnel. Supposons que $[b_0, b_1, b_2, \dots]$ est aussi de valeur ξ . Montrons que $a_n = b_n$ pour tout n . C'est vrai pour $n = 0$ car on a $[\xi] = a_0 = b_0$ par le lemme 4.5. Supposons maintenant que $a_i = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Alors on a $[b_0, b_1, \dots] = [a_0, \dots, a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$. Par le lemme 4.6, on voit que $[a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ et $[b_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$ sont tous les deux de valeur ξ_{n+1} . Comme ξ_{n+1} est irrationnel, le lemme 4.5 dit qu'on a $[\xi_{n+1}] = a_{n+1} = b_{n+1}$. Donc on a la récurrence montrant qu'on a $a_n = b_n$ pour tout n .

Maintenant traitons le cas d'un ξ rationnel dont la fraction continue donnée par l'algorithme (4) est $[a_0, \dots, a_m]$. Soit $[b_0, \dots, b_k]$ une autre fraction continue de valeur ξ . Les mêmes arguments que dans le cas irrationnel marchent tant que les $\xi_{n+1} = [a_{n+1}, \dots, a_m]$ sont non entiers. Donc on a $[a_0, \dots, a_{m-1}, a_m] = [a_0, \dots, a_{m-1}, b_m, \dots, b_k]$, et on a $\xi_m = a_m = [b_m, \dots, b_k]$ entier. Par le lemme 4.5 on a donc soit $[b_m, \dots, b_k] = [a_m]$ soit $[b_m, \dots, b_k] = [a_m - 1, 1]$. \square

5. FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES

Définition 5.1. Un *irrationnel quadratique* est un nombre réel de la forme $a + b\sqrt{D}$ avec $D \geq 2$ un entier non carré, et a et $b \neq 0$ rationnels. On dit aussi un *nombre quadratique réel*.

Par exemple,

$$\sqrt{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$$

sont des irrationnels quadratiques. Les nombres quadratiques réels sont les solutions réelles mais irrationnelles des équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c rationnels (ou entiers). Pour trouver l'équation du second degré dont $\frac{2 + \sqrt{14}}{5}$ est la solution, on écrit $x = \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$ puis on isole le radical

$$5x - 2 = \sqrt{14}.$$

Maintenant on élève les deux membres de l'équation au carré, puis on met tous les termes d'un côté.

$$(5x - 2)^2 = (\sqrt{14})^2 = 14, \quad 25x^2 - 20x + 4 = 14, \quad 25x^2 - 20x - 10 = 0.$$

Comme les trois coefficients 25, -20, -10 ont un pgcd non trivial 5, on peut diviser par lui et trouver l'équation plus jolie

$$5x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Cette procédure trouve une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c entiers, $a > 0$ et $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$ pour tout irrationnel quadratique.

Le grand théorème sur les fractions continues et les irrationnels quadratiques est le suivant.

Théorème 5.2. *La fraction continue d'un réel ξ est ultimement périodique si et seulement si ξ est un irrationnel quadratique.*

Une fraction continue ultimement périodique est notée avec une barre au dessus de la période, comme pour les décimaux. Par exemple $[1, 1, \overline{2, 1, 4}]$ signifie $[1, 1, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \dots]$.

Commençons d'abord avec une fraction continue périodique dès son début, par exemple $[\overline{1}] = [1, 1, 1, 1, \dots]$. Essentiellement, si on a

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

alors on a

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Cela se résout en écrivant $x = \frac{x+1}{x}$ puis $x^2 = x + 1$ puis $x^2 - x - 1 = 0$. Or cette équation du second degré a une solution positive $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et une solution négative $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Comme notre nombre est positif — sa partie entière est $[x] = a_0 = 1$ — on a $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Similairement si on a

$$y = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}}}} = [\overline{1, 2, 3}],$$

alors on a

$$y = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{y}}} = [1, 2, 3, y].$$

On évalue le membre de droite par l'algorithme des réduites

a_i	-	1	2	3	y
p_i	1	1	3	10	$10y + 3$
q_i	0	1	2	7	$7y + 2$

Donc on a

$$y = \frac{10y + 3}{7y + 2}, \quad y(7y + 2) = 7y^2 + 2y = 10y + 3, \quad 7y^2 - 8y - 3 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 7 \cdot 3}}{2 \cdot 7} = \frac{8 \pm \sqrt{148}}{14} = \frac{4 \pm \sqrt{37}}{7}.$$

Pour les fractions continues qui sont périodiques depuis leur début avec des quotients partiels strictement positif $a_i > 0$, il y a toujours une racine positive et une racine négative de l'équation du second degré, et notre nombre est la racine positive $y = \frac{4 + \sqrt{37}}{7}$.

(La raison pour laquelle les racines sont de signes opposés est que l'équation est de la forme

$$q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - \frac{p_n - q_{n-1}}{q_n}x - \frac{p_{n-1}}{q_n} = 0.$$

Les deux solutions α, β d'une telle équation vérifient $\alpha + \beta = \frac{p_n - q_{n-1}}{q_n}$ et $\alpha\beta = -\frac{p_{n-1}}{q_n} < 0$.
Donc une est positive et une est négative.)

Si la fraction continue n'est pas périodique depuis le début mais seulement plus tard, on calcule d'abord la partie périodique. Par exemple pour $z = [1, 1, \overline{1, 2, 3}]$ on écrit

$$z = [1, 1, y] \quad y = [\overline{1, 2, 3}] = [1, 2, 3, y].$$

On calcule d'abord $y = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$ comme ci-dessus. Puis on utilise l'algorithme des réduites pour calculer z

a_i	-	1	1	y
p_i	1	1	2	$2y+1$
q_i	0	1	1	$y+1$

$$z = \frac{2y+1}{y+1} = \frac{2 \cdot \frac{4+\sqrt{37}}{7} + 1}{\frac{4+\sqrt{37}}{7} + 1} \cdot \frac{7}{7} = \frac{15+2\sqrt{37}}{11+\sqrt{37}} \cdot \frac{11-\sqrt{37}}{11-\sqrt{37}} = \frac{81+7\sqrt{37}}{84}.$$

Un autre exemple : pour calculer $x = [1, 2, 3, 3, 3, \dots] = [1, 2, \bar{3}]$, on écrit $x = [1, 2, y]$ et $y = [\bar{3}] = [3, y]$. On a les tableaux

$y \rightarrow$	a_i	-	3	y
	p_i	1	3	$3y+1$
	q_i	0	1	y

$x \rightarrow$	a_i	-	1	2	y
	p_i	1	1	3	$3y+1$
	q_i	0	1	2	$2y+1$

Donc on a

$$y = \frac{3y+1}{y}, \quad y^2 = 3y+1, \quad y^2 - 3y - 1 = 0, \quad y = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

$$x = \frac{3y+1}{2y+1} = \frac{3 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} + 1}{2 \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} + 1} \cdot \frac{2}{2} = \frac{11+3\sqrt{13}}{8+2\sqrt{13}} \cdot \frac{8-2\sqrt{13}}{8-2\sqrt{13}} = \frac{10+2\sqrt{13}}{12} = \frac{5+\sqrt{13}}{6}.$$

Pour trouver la fraction continue d'un irrationnel quadratique ξ avec une étape de préparation que j'expliquerai en bas, on applique l'algorithme standard, mais en gardant la liste a_0, a_1, a_2, \dots des quotients partiels, mais aussi la liste $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ des restes partiels. Quand on trouve une répétition $\xi_i = \xi_{i+n}$, on sait qu'on aura ensuite

$$a_i = [\xi_i] = [\xi_{i+n}] = a_{i+n},$$

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{\xi_i - a_i} = \frac{1}{\xi_{i+n} - a_{i+n}} = \xi_{i+n+1},$$

$$a_{i+1} = [\xi_{i+1}] = [\xi_{i+n+1}] = a_{i+n+1},$$

...

Donc on aura $a_k = a_{k+n}$ pour tout $k \geq i$ et la fraction continue est

$$\xi = [a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, \overline{a_i, \dots, a_{i+n-1}}].$$

Par exemple, pour $\xi = \sqrt{7}$, on trouve

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{7}, \\ a_0 &= [\sqrt{7}] = 2, \\ \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}, \\ a_1 &= \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3} \right] = 1, \\ \xi_2 &= \left(\frac{\sqrt{7}-1}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} \cdot \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1} = \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}, \\ a_2 &= \left[\frac{\sqrt{7}+1}{2} \right] = 1, \\ \xi_3 &= \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}, \\ a_3 &= \left[\frac{\sqrt{7}+1}{3} \right] = 1, \\ \xi_4 &= \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2, \\ a_4 &= [\sqrt{7}+2] = 4, \\ \xi_5 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = \xi_1. \end{aligned}$$

et on a $\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4]$.

On voit un phénomène apparaît. Tous nos ξ_n sont de la forme

$$\xi_n = \frac{\sqrt{D} + U_n}{V_n} \quad \text{avec } V_n \text{ divisant } D - U_n^2. \quad (9)$$

Quand on a cela, on a

$$\xi_n - a_n = \frac{\sqrt{D} + (U_n - a_n V_n)}{V_n} = \frac{\sqrt{D} - U_{n+1}}{V_n}$$

pour $U_{n+1} = a_n V_n - U_n$. Or V_n qui divise $D - U_n^2$ divise aussi $D - U_{n+1}^2 = D - (U_n - a_n V_n)^2$.
Donc on a

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n} = \frac{V_n}{\sqrt{D} - U_{n+1}} = \frac{\sqrt{D} + U_{n+1}}{V_{n+1}}$$

avec $V_n V_{n+1} = D - U_{n+1}^2$. Donc dès qu'on a ξ_n sous la forme (9), on pose

$$a_n = \left[\frac{\sqrt{D} + U_n}{V_n} \right], \quad U_{n+1} = a_n V_n - U_n, \quad V_{n+1} = \frac{D - U_{n+1}^2}{V_n}, \quad \xi_{n+1} = \frac{\sqrt{D} + U_{n+1}}{V_{n+1}}. \quad (10)$$

Et comme V_{n+1} divise $D - U_{n+1}^2$, on peut continuer, jusqu'à ce qu'on voit une répétition.

Il est toujours possible de réécrire un irrationnel quadratique sous la forme (9). Par exemple, si on a $\xi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$:

– On écrit tout un dénominateur commun : $\xi = \frac{3}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{-2\sqrt{2}+3}{6}$.

- Si le signe devant le terme avec le radical est négatif, on le fait entrer dans le dénominateur : $\xi = \frac{2\sqrt{2}-3}{-6}$.
- S'il y a un entier devant le radical comme dans $2\sqrt{2}$, on fait entrer son carré sous le radical $\sqrt{8}$. Cela donne $\xi = \frac{\sqrt{8}-3}{-6}$.
- On a maintenant un $\frac{\sqrt{d+u}}{v}$. Si v ne divise pas $d - u^2$, on multiplie numérateur et dénominateur par $w = \frac{|v|}{\text{pgcd}(v, d-u^2)}$. On a $\frac{\sqrt{d+u}}{v} = \frac{\sqrt{dw^2+uw}}{vw}$ avec vw divisant $(d - u^2)w^2$.
Maintenant on a ce qu'il faut. Dans notre cas, on trouve $\xi = \frac{\sqrt{8 \cdot 36} - 18}{-36} = \frac{\sqrt{288} - 18}{-36}$.
Maintenant on fait les calculs (10) en prenant compte de l'encadrement $16 < \sqrt{288} < 17$.

$$\begin{array}{lll}
\xi_0 = \frac{\sqrt{288} - 18}{-36}, & a_0 = 0, & \xi_0 - a_0 = \frac{\sqrt{288} - 18}{-36}, \\
\xi_1 = \frac{-36}{\sqrt{288} - 18} = \frac{\sqrt{288} + 18}{1}, & a_1 = 34, & \xi_1 - a_1 = \frac{\sqrt{288} - 16}{1} \\
\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{288} - 16} = \frac{\sqrt{288} + 16}{32}, & a_2 = 1, & \xi_2 - a_2 = \frac{\sqrt{288} - 16}{32} \\
\xi_3 = \frac{32}{\sqrt{288} - 16} = \frac{\sqrt{288} + 16}{1} & a_3 = 32, & \xi_3 - a_3 = \frac{\sqrt{288} - 16}{1} \\
\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{288} - 16} = \frac{\sqrt{288} + 16}{32} = \xi_2
\end{array}$$

Donc $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = [0, 34, \overline{1}, 32]$.

Théorème 5.3. *Pour $N \geq 2$ un entier naturel non carré, la fraction continue de $[\sqrt{N}] + \sqrt{N}$ est périodique depuis le début.*

Donc les fractions continues de $1 + \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{5}$, $2 + \sqrt{6}$, $2 + \sqrt{7}$, $2 + \sqrt{8}$, $3 + \sqrt{10}$, $3 + \sqrt{11}$, \dots , sont périodiques depuis le début. Si la fraction continue de $[\sqrt{N}] + \sqrt{N}$ est $[2a_0, a_1, \dots, a_n]$, alors celle de \sqrt{N} est $[a_0, \overline{a_1, \dots, a_n}, 2a_0]$.

Références. Il y a essentiellement deux démonstrations de la périodicité ultime de la fraction continue d'un irrationnel quadratique ξ : une [2, 3, 6] qui démontre que dans les équations du second degré $A_n \xi_n^2 + B_n \xi_n + C_n = 0$ vérifiées par les ξ_n , les A_n, B_n, C_n sont bornés, donc il faut que dans la suite infinie des ξ_n il y a des répétitions de ces équations. L'autre [4, 7, 8] démontre que les conjugués $\bar{\xi}_n$ sont ultimement négatifs, donnant des bornes $0 < V_n < D$ et $|U_n| < \sqrt{D}$ pour $n \gg 0$, donc il faut encore des répétitions.

Dans [8, Theorem 7.20] on trouve une caractérisation des ξ dont la fraction continue est périodique (non seulement ultimement). La caractérisation est équivalente à ce que ξ soit de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$ avec β un rationnel positif non carré, et α un rationnel vérifiant $|\sqrt{\beta} - 1| < \alpha < \sqrt{\beta}$. Les nombres $[\sqrt{N}] + \sqrt{N}$ sont de ce genre, d'où le théorème 5.3.

Pour certains nombres, dont les $[\sqrt{N}] + \sqrt{N}$, les périodes sont symétriques, et la fraction continue de la forme $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_3, a_2, a_1]$. Je n'ai pas trouvé de référence expliquant ce phénomène connu, mais je pense que c'est pour les $\alpha + \sqrt{\beta}$ comme ci-dessus avec α entier ou demi-entier.

RÉFÉRENCES

- [1] Michel Demazure. *Cours d'algèbre : Primalité. Divisibilité. Codes*. Nouvelle Bibliothèque Mathématique, I. Cassini, Paris, 1997.
- [2] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers. Transl. from the English by François Sauvageot, introduction by Catherine Goldstein. (Introduction à la théorie des nombres.)*. Paris : Vuibert ; Paris : Springer. xxxiv, 568 p., 2007.
- [3] A. Ya. Khinchin. *Continued fractions*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1997. Traduit du russe. Réédition de la traduction américaine de 1964 [University of Chicago Press, Chicago].
- [4] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Vol. 2 : Seminumerical Algorithms*. Boston : Addison-Wesley, 3rd edition, 1998.
- [5] H. W. Lenstra, Jr. Solving the Pell equation. *Notices Amer. Math. Soc.*, 49(2) :182–192, 2002.
- [6] William Judson LeVeque. *Topics in number theory. Vol. I, II*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1956 original [Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.].
- [7] Ivan Niven. *Irrational numbers*. The Carus Mathematical Monographs, No. 11. The Mathematical Association of America. Distributed by John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1956.
- [8] Ivan Niven and Herbert S. Zuckerman. *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 4th edition, 1980.
- [9] André Weil. *Number theory for beginners*. Springer-Verlag, New York, 1979. Avec la collaboration de Maxwell Rosenlicht.