LES ROTATIONS ET LES QUATERNIONS

10. Les nombres complexes $\mathbf{C}$

La construction du corps non commutatif $\mathbf{H}$ de quaternions est une variante plus compliquée de la construction du corps commutatif $\mathbf{C}$ de nombres complexes. Donc on commence en rappelant la construction de $\mathbf{C}$ à partir de $\mathbf{R}$.

Les nombres complexes s'écrivent $a + bi$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. Donc $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 2 avec base $\{1, i\}$. La loi d'addition de $\mathbf{C}$ est celle que $\mathbf{C}$ possède en tant qu'espace vectoriel. La multiplication est $\mathbf{R}$-***bilinéaire****, et 1 est l'élément neutre. Cela signifie qu'on peut développer un produit comme

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2. \tag{10.1}$$

Finalement on fixe $i^2 = -1$. Cela nous donne la formule $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$.

Quand on définit $\mathbf{C}$ et ses opérations dans cette façon, il n'est pas évident *a priori* que la multiplication est associative ou commutative. Les autres propriétés des lois — l'addition est associative et commutative avec un élément neutre 0 et des opposés avec $z + (-z) = 0$, et il y a la loi de distributivité — se déduisent des faits que $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et la multiplication est bilinéaire. Pour l'associativité de la multiplication, on pourrait développer les deux membres de l'équation

$$\Big[(a + bi)(c + di)\Big](e + fi) = (a + bi)\Big[(c + di)(e + fi)\Big]$$

et les comparer. Mais c'est un peu lourd. Après développement il y a 8 termes de chaque côté. Mais à cause de la bilinéarité de la multiplication, on peut réduire ce calcul à la vérification qu'on a $(uv)w = u(vw)$ pour $u, v, w \in \{1, i\}$. Cela remplace un calcul légèrement gros avec $8 + 8$ termes par 8 petits calculs. De plus 7 des 8 calculs sont pris en charge par le lemme suivant.

Lemme 10.1. *Soit E un ensemble muni d'une loi de multiplication $E \times E \to E$ avec un élément neutre $1 \in E$ satisfaisant à $1u = u1 = u$ pour tout $u \in E$. Alors pour tout $u, v \in E$ on a*

$$(1u)v = 1(uv), \qquad (u1)v = u(1v), \qquad (uv)1 = u(v1).$$

En effet, toutes ces expressions sont égales à uv. Ce lemme s'occupe de tous les calculs de $(uv)w = u(vw)$ avec $u, v, w \in \{1, i\}$ avec au moins un des nombres u, v, w est 1. Il nous reste un seul calcul

$$(ii)i = (-1)i = -i = i(-1) = i(ii). \tag{10.2}$$

Donc la vérification de l'associatitivité de la multiplication dans $\mathbf{C}$ peut se réduire au petit calcul (10.2), si on prend compte de la bilinéarité de la multiplication et des propriétés de l'élément neutre 1.

$*$. La $\mathbf{R}$-*bilinéarité* signifie que pour $r \in \mathbf{R}$ et $u, v, w \in \mathbf{C}$ (ou $\mathbf{H}$) on a

$$(u + v)w = uw + vw, \qquad (ru)v = r(uv), \qquad u(v + w) = uv + uw, \qquad u(rv) = r(uv).$$

C'est à dire, pour tout $u \in \mathbf{C}$ les applications $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ envoyant $z \mapsto zu$ et $z \mapsto uz$ sont $\mathbf{R}$-linéaires.

La commutativité de la multiplication dans $\mathbf{C}$ se réduit dans la même façon à la vérification qu'on a $uv = vu$ pour $u, v \in \{1, i\}$. Cela se fait très facilement parce que le neutre 1 commute avec tout élément, et i comme tout élément commute avec lui-même.

Une autre approche à la définition des nombres complexes est d'identifier $\mathbf{C}$ au l'espace de matrices

$$\mathbf{C}_{\mathrm{mat}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\} \subset M_2(\mathbf{R}). \tag{10.3}$$

Les éléments de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ s'écrivent donc $a\mathbf{1} + b\mathbf{j}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ et

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

Donc $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 avec base $\{\mathbf{1}, \mathbf{j}\}$ †. Comme $\mathbf{1}$ est la matrice identité, il est l'élément neutre pour la multiplication des matrices. La multiplication des matrices donne

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{1} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \tag{10.5}$$

et en développant

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{j})(c\mathbf{1} + d\mathbf{j}) = (ac - bd)\mathbf{1} + (ad + bc)\mathbf{j}. \tag{10.6}$$

Donc l'application $\phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ envoyant $a + bi \mapsto a\mathbf{1} + b\mathbf{j}$ est une bijection telle que les sommes et produits de membres correspondants de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ correspondent : $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ et $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. On dit que $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est un anneau isomorphe au $\mathbf{C}$ usuel. L'avantage de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ par rapport à la définition précédente de $\mathbf{C}$ est que la multiplication dans $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est la multiplication de matrices, qui est connue d'être associative. Donc la vérification directe de l'associativité de la multiplication n'est pas nécessaire pour $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$. Le désavantage de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est qu'il faut vérifier que le produit de deux membres de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ reste dans le sous-espace $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ de $M_2(\mathbf{R})$. Mais par la $\mathbf{R}$-bilinéarité de la multiplication, il suffit de montrer que les produits de membres de la base $\{\mathbf{1}, \mathbf{j}\}$ sont dans $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$, et ceci est fait dans (10.5).

La conjugaison complexe a une interpretation matricielle jolie. Pour une matrice 2×2 définissons sa *conjuguée* dans la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{conj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

Pour toute matrice 2×2 on a

$$A\,\mathrm{conj}(A) = \mathrm{conj}(A)A = (ad - bc)\mathbf{1}. \tag{10.8}$$

On écrit $\det A = ad - bc$; c'est le *déterminant* de A. Pour une matrice $\mathbf{z} = a\mathbf{1} + b\mathbf{j} \in \mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$, on a $\mathrm{conj}(\mathbf{z}) = a\mathbf{1} - b\mathbf{j}$. Donc on a bien retrouvé la conjugaison complexe. On a $\det \mathbf{z} = a^2 + b^2$, qui est un réel > 0 quand $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

Le choix du sous-espace vectoriel $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{R})$ n'est pas un hasard. Chaque $z \in \mathbf{C}$ définit l'application linéaire de multiplication par z

$$\begin{array}{rccc} \mu_z\colon & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & w & \longmapsto & zw. \end{array} \tag{10.9}$$

Ecrivons les membres de $\mathbf{R}^2$ comme des vecteurs colonnes $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ au lieu de la notation (x, y) classique. Alors on peut identifier $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ en identifiant $x + yi \in \mathbf{C}$ à $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^2$. Alors pour

†. On choisit la lettre $\mathbf{j}$ à cause des notations dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ ci-dessous.

$z = a+bi \in \mathbf{C}$, l'application $\mu_z \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de (10.9) s'identifie à l'application $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ envoyant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{10.10}$$

Voilà les matrices de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$.

11. Les quaternions : version matricielle $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$

On commence avec l'approche matricielle. Définissons

$$\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \, z, w \in \mathbf{C} \right\} \subset M_2(\mathbf{C}). \tag{11.1}$$

Les membres de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \tag{11.2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Donc $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est un sous-espace vectoriel ***réel*** de $M_2(\mathbf{C})$ de dimension 4 avec base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Calculons les produits de membres de la base. La matrice identité $\mathbf{1}$ est l'élément neutre pour la multiplication des matrices

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{1k} = \mathbf{k1} = \mathbf{k}. \tag{11.4}$$

Les carrés des autres membres de la base sont

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}. \tag{11.5}$$

Les autres produits sont

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k}, & \mathbf{jk} &= \mathbf{i}, & \mathbf{ki} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{ji} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Donc tous les produits de membres de la base de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ sont dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$. Par la bilinéarité de la multiplication de matrices, on en déduit que tout produit de membres de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ reste dans le sous-espace vectoriel réel $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{C})$. Donc la multiplication de matrices se restreint à une multiplication $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \times \mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$.

L'addition et la multiplication dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est l'addition et la multiplication de matrices, donc elles vérifient toutes les propriétés de celles-ci : l'associativité, la distributivité, les propriétés des éléments neutres $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$. L'addition est commutative, mais la multiplication ne l'est pas (voir (11.6)). De plus, comme $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est un espace vectoriel réel, il y a aussi une opération de multiplication par un scalaire $r \in \mathbf{R}$:

$$r(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = ra\mathbf{1} + rb\mathbf{i} + rc\mathbf{j} + rd\mathbf{k}.$$

La multiplication $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \times \mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est $\mathbf{R}$-bilinéaire.

L'opération de conjugaison de (10.7) envoye

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a-bi & c+di \\ -c+di & a+bi \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$\mathrm{conj}(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} \tag{11.7}$$

On a

$$\det\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = |a+bi|^2 + |c+di|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

qui est réel et qui est > 0 pour $a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. On voit que tout membre de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ sauf $\mathbf{0}$ a un inverse dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$

$$(a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k})^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a\mathbf{1}-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}).$$

Important : *La division n'est pas réellement une opération fondamentale au même niveau que l'addition, la multiplication et les opposés et inverses. Diviser r par s veut dire multiplier r et s^{-1}. Pour des réels, dont la multiplication est commutative, la notation $\frac{r}{s}$ ne pose pas de problème parce qu'il n'y a qu'une valeur possible $rs^{-1} = s^{-1}r$. Pour les quaternions, avec une loi de multiplication non commutative, la notation symétrique $\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}$ n'est pas utilisée parce qu'elle a deux interpretations asymétriques et distinctes $\mathbf{u}\mathbf{v}^{-1} \neq \mathbf{v}^{-1}\mathbf{u}$.*

Dans le cadre des quaternions, on met dans un dénominateur uniquement un réel non nul.

Proposition 11.1. *Pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ et $r \in \mathbf{R}$ on a*

$$\begin{aligned} \operatorname{conj}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \operatorname{conj}(\mathbf{u}) + \operatorname{conj}(\mathbf{v}), & \operatorname{conj}(r\mathbf{u}) &= r\operatorname{conj}(\mathbf{u}), \\ \operatorname{conj}(\mathbf{u}\mathbf{v}) &= \operatorname{conj}(\mathbf{v})\operatorname{conj}(\mathbf{u}), & \operatorname{conj}(\operatorname{conj}(\mathbf{u})) &= \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{11.8}$$

La conjugaison est donc une opération $\mathbf{R}$-linéaire et auto-inverse qui ***inverse l'ordre de produits***.

Preuve. La seule formule qui n'est pas immédiatement claire est $\operatorname{conj}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \operatorname{conj}(\mathbf{v})\operatorname{conj}(\mathbf{u})$. On réduit par la $\mathbf{R}$-bilinéarité de la multiplication dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ aux cas particuliers $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ qu'on vérifie à la main.[‡] □

12. Les quaternions : version abstraite $\mathbf{H}$

On peut définir les quaternions sans utiliser des matrices. On définit $\mathbf{H}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 4 avec base $\{1, i, j, k\}$. Ses membres s'appellent des *quaternions*, et ils s'écrivent sous la forme $a+bi+cj+dk$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. La structure d'espace vectoriel réel nous donne déjà deux opérations : l'addition et la multiplication par un scalaire réel

$$(a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk) = (a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k, \tag{12.1}$$

$$r(a+bi+cj+dk) = ra+rbi+rcj+rdk. \tag{12.2}$$

‡. Une autre démonstration se fait en notant qu'on a $\operatorname{conj}(A) = P\,{}^tAP^{-1}$ pour $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors on déduit de ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et de $P(CD)P^{-1} = (PCP^{-1})(PDP^{-1})$ qu'on a $\operatorname{conj}(AB) = \operatorname{conj}(B)\operatorname{conj}(A)$ pour toutes matrices A, B.

Pour les savants : *Notre conjugaison $A \mapsto P\,{}^tAP^{-1}$ est l'anti-involution induite sur $M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ par la conjugaison de $\mathbf{H}$. L'involution $A \mapsto P\overline{A}P^{-1}$ est l'involution sur $M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ induite par la conjugaison de $\mathbf{C}$. Le sous-espace $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{C})$ est le sous-anneau de matrices invariantes sous la dernière involution, qui est $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.*

La multiplication $\mathbf{H}\times\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ est définie pour les membres de la base par les mêmes formules que (11.4)–(11.6) :

$$\begin{array}{llll} 1^2=1, & 1i=i1=i, & 1j=j1=j, & 1k=k1=k, \\ i^2=-1, & j^2=-1, & k^2=-1, & \\ ij=k, & jk=i, & ki=j, & \\ ji=-k, & kj=-i, & ik=-j. & \end{array} \tag{12.3}$$

On peut se souvenir des signes dans les deux dernières lignes de formules en notant la suivante : *Si u,v,w sont trois membres consécutifs de la suite périodique $i,j,k,i,j,k,i,j,k,\dots$, alors on a $uv=w$ et $vu=-w$.*

Ce produit s'étend à deux quaternions généraux par bilinéarité

$$\begin{aligned}(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)&(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)\\ &=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)i\\ &\qquad+(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)j+(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)k.\end{aligned} \tag{12.4}$$

En pratique, on développe le produit en termes de produits d'éléments de la base $\{1,i,j,k\}$, puis on applique les formules (12.3) aux termes. Par exemple

$$(4+i)(2-3j)=4\cdot 2-4\cdot 3j+i\cdot 2-i\cdot 3j=8-12j+2i-3k=8+2i-12j-3k.$$

Définition 12.1. Un quaternion est *scalaire* ou *réel* s'il est de la forme $r=r+0i+0j+0k$ avec $r\in\mathbf{R}$. Il est *pur* s'il est de la forme $bi+cj+dk$ avec $b,c,d\in\mathbf{R}$. L'ensemble de quaternions réels s'identifie à $\mathbf{R}$. On notera

$$\mathbf{H}^{\text{pur}}=\{\text{quaternions purs}\}=\{bi+cj+dk\mid b,c,d\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{H}. \tag{12.5}$$

Tout quaternion a une *partie scalaire* (ou réelle) et une *partie pure*

$$\Re\mathrm{e}(a+bi+cj+dk)=a\in\mathbf{R}, \tag{12.6}$$

$$\Im\mathrm{m}(a+bi+cj+dk)=bi+cj+dk\in\mathbf{H}^{\text{pur}}. \tag{12.7}$$

La partie scalaire d'un quaternion est donc bien un nombre réel comme la partie réelle d'un nombre complexe, mais la partie pure a trois composantes.

Les quaternions réels commutent avec tous les autres

$$r(a+bi+cj+dk)=ra+rbi+rcj+rdk=(a+bi+cj+dk)r,$$

et la multiplication avec un quaternion réel r coïncide avec la multiplication par le scalaire $r\in\mathbf{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{H}$.

Parmi les quaternions réels sont $0=0+0i+0j+0k$ et $1=1+0i+0j+0k$.

Théorème 12.2. *Soit* $\mathsf{u},\mathsf{v},\mathsf{w}\in\mathbf{H}$ *et* $r\in\mathbf{R}$. *Alors les opérations de* (12.1)–(12.4) *ont les propriétés suivantes*

$$\begin{array}{ccc} (\mathsf{u}+\mathsf{v})+\mathsf{w}=\mathsf{u}+(\mathsf{v}+\mathsf{w}), & \mathsf{u}+\mathsf{v}=\mathsf{v}+\mathsf{u}, & \mathsf{u}+0=\mathsf{u}, \\ \mathsf{u}(\mathsf{v}+\mathsf{w})=\mathsf{u}\mathsf{v}+\mathsf{u}\mathsf{w}, & (\mathsf{u}+\mathsf{v})\mathsf{w}=\mathsf{u}\mathsf{w}+\mathsf{v}\mathsf{w}, & r\mathsf{u}=\mathsf{u}r, \\ 1\mathsf{u}=\mathsf{u}, & 0\mathsf{u}=0, & (-1)\mathsf{u}=-\mathsf{u}, \\ \mathsf{u}+(-\mathsf{u})=0, & (\mathsf{u}\mathsf{v})\mathsf{w}=\mathsf{u}(\mathsf{v}\mathsf{w}). & \end{array} \tag{12.8}$$

La multiplication n'est pas commutative : $\mathsf{uv} \neq \mathsf{vu}$ en général. Toutes les formules se déduisent facilement de (12.1)–(12.4) sauf l'associativité $(\mathsf{uv})\mathsf{w} = \mathsf{u}(\mathsf{vw})$. On peut démontrer l'associativité dans deux manières.

Première démonstration de l'associativité dans $\mathbf{H}$. L'application de $\mathbf{H}$ vers $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ envoyant le quaternion $a + bi + cj + dk$ en la matrice

$$a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{C})$$

est une bijection. La multiplication dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est définie comme la multiplication des matrices, qui est associative. Les produits calculés dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ dans (11.4)–(11.6) et les produits définis dans $\mathbf{H}$ dans (12.3) correspondent. Donc si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ sont les membres correspondant à $u, v, w \in \mathbf{H}$, l'équation $(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw})$ dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ implique l'équation $(uv)w = u(vw)$ dans $\mathbf{H}$. □

Deuxième démonstration de l'associativité dans $\mathbf{H}$. En développant les produits de quaternions généraux par la bilinéarité, on se réduit à avoir à démontrer $(uv)w = u(vw)$ pour $u, v, w \in \{1, i, j, k\}$. Si on a $u = 1$ ou $v = 1$ ou $w = 1$, alors l'équation se déduit du lemme 10.1. Donc les cas importants sont $u, v, w \in \{i, j, k\}$.

D'abord traitons les cas avec $u = i$. Ils sont

$$\begin{aligned}
&(ii)i = (-1)i = -i = i(-1) = i(ii), && (ij)k = kk = -1 = ii = i(jk),\\
&(ii)j = (-1)j = -j = ik = i(ij) && (ik)i = (-j)i = k = ij = i(ki),\\
&(ii)k = (-1)k = -k = i(-j) = i(ik), && (ik)j = (-j)j = 1 = i(-i) = i(kj),\\
&(ij)i = ki = j = i(-k) = i(ji), && (ik)k = (-j)k = -i = i(-1) = i(kk).\\
&(ij)j = kj = -i = i(-1) = i(jj),
\end{aligned} \tag{12.9}$$

Ensuite notons que dans les équations (12.3) définissant le produit des i, j, k si on substitue simultanément $i \leftarrow j$ et $j \leftarrow k$ et $k \leftarrow i$, alors l'ensemble de formules ne changent pas. Donc si on fait ces mêmes substitions dans le calcul montrant par exemple $(ii)j = i(ij)$, on obtient un calcul montrant $(jj)k = j(jk)$. En faisant ces substitution dans les calculs ci-dessus, on trouve des calculs montrant $(jv)w = j(vw)$ pour tout $v, w \in \{i, j, k\}$.

Similairement si dans les calculs ci-dessus on substitue simultanément $i \leftarrow k$ et $j \leftarrow i$ et $k \leftarrow j$, on trouve des calculs montrant $(kv)w = k(vw)$ pour tout $v, w \in \{i, j, k\}$. □

Définition 12.3. Le *conjugué* d'un quaternion est

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \tag{12.10}$$

Donc la conjugaison quaternionique ne change pas la partie réelle, et elle change tous les signes dans la partie pure.

Théorème 12.4. *Soit* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{H}$ *et* $r \in \mathbf{R}$. *Alors on a*

$$\overline{\mathsf{u} + \mathsf{v}} = \overline{\mathsf{u}} + \overline{\mathsf{v}}, \qquad \overline{r\mathsf{u}} = r\overline{\mathsf{u}},$$
$$\overline{\overline{\mathsf{u}}} = \mathsf{u}, \qquad \overline{\mathsf{uv}} = \overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}}.$$

Ainsi le conjugué d'un produit est le produit des conjugués ***<u>dans l'ordre inverse</u>***. C'est comme dans les formules pour les transposées et inverses de matrices ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve. Les trois premières formules sont immédiates. La $\mathbf{R}$-linéarité de la conjugaison et la $\mathbf{R}$-bilinéarité de la multiplication entraînent qu'il suffit de vérifier $\overline{\mathsf{uv}} = \overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}}$ pour $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \{1, i, j, k\}$. On a $\overline{1^2} = 1 = \overline{1}^2$. Pour $\mathsf{u} \in \{i, j, k\}$ on a $\overline{1\mathsf{u}} = -\mathsf{u} = \overline{\mathsf{u}}\overline{1}$ et $\overline{\mathsf{u}1} = -\mathsf{u} = \overline{1}\overline{\mathsf{u}}$ et $\overline{\mathsf{u}^2} = -1 = \overline{\mathsf{u}}^2$. Finalement, si $\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}$ sont trois termes consécutifs dans $i, j, k, i, j, k, \ldots$, alors on a $\overline{\mathsf{uv}} = \overline{\mathsf{w}} = -\mathsf{w} = (-\mathsf{v})(-\mathsf{u}) = \overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}}$ et $\overline{\mathsf{vu}} = \overline{-\mathsf{w}} = \mathsf{w} = (-\mathsf{u})(-\mathsf{v}) = \overline{\mathsf{u}}\,\overline{\mathsf{v}}$. □

Théorème 12.5. *Soit* $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk$ *un quaternion* (*avec* a, b, c, d *réels*). *Alors*

$$\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} = \overline{\mathsf{u}}\mathsf{u} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{12.11}$$

Ainsi on a toujours $\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} \in \mathbf{R}$, *et on a* $\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} > 0$ *pour* $\mathsf{u} \neq 0$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} &= \big(a + (bi + cj + dk)\big)\big(a - (bi + cj + dk)\big) \\
&= a^2 + (bi + cj + dk)a - a(bi + cj + dk) - (bi + cj + dk)^2 \\
&= a^2 + 0 - (bi + cj + dk)(bi + cj + dk) \\
&= a^2 - \big(b^2i^2 + c^2j^2 + d^2k^2 + bc(ij + ji) + bd(ik + ki) + cd(jk + kj)\big) \\
&= a^2 - (-b^2 - c^2 - d^2 + 0) \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.
\end{aligned}$$

En substituant $\overline{\mathsf{u}} = a - bi - cj - dk$ pour u, on trouve

$$\overline{\mathsf{u}}\mathsf{u} = a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$ □

Définition 12.6. La *norme* d'un quaternion $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk$ (avec a, b, c, d réels) est le réel

$$\|\mathsf{u}\| = \sqrt{\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

On a $\|\mathsf{u}\| > 0$ pour tout $\mathsf{u} \neq 0$, et $\|0\| = 0$.

Le théorème et la définition nous donnent alors les formule

$$\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} = \|\mathsf{u}\|^2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}, \qquad \|\mathsf{u}\| = \|\overline{\mathsf{u}}\| \tag{12.12}$$

pour tout quaternion u, avec $\|\mathsf{u}\|^2 > 0$ pour $\mathsf{u} \neq 0$.

La norme d'un quaternion est l'analogue du module $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'un nombre complexe $z = a + bi$.

En multipliant (12.12) par le réel $\frac{1}{\|\mathsf{u}\|^2}$, on trouve une formule pour l'inverse de u.

Théorème 12.7. *Soit* u *un quaternion avec* $\mathsf{u} \neq 0$. *Alors* u *est inversible avec* $\mathsf{u}^{-1} = \frac{1}{\|\mathsf{u}\|^2}\overline{\mathsf{u}}$.

Corollaire 12.8. *Soit* u *un quaternion avec* $\|\mathsf{u}\| = 1$. *Alors* u *est inversible avec* $\mathsf{u}^{-1} = \overline{\mathsf{u}}$.

Théorème 12.9. *Soit* $\mathsf{u} \neq 0$ *et* $\mathsf{v} \neq 0$ *des quaternions. Alors on a* $\mathsf{uv} \neq 0$ *et* $(\mathsf{uv})^{-1} = \mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1}$.

Noter que $(\mathsf{uv})^{-1} = \mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1} \neq \mathsf{u}^{-1}\mathsf{v}^{-1}$ en général parce que la multiplication de quaternions n'est pas commutative.

Preuve. Par le théorème 12.7, u et v sont inversibles. Le produit uv des deux inversibles et inversible avec inverse $\mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1}$ (car $\mathsf{uvv}^{-1}\mathsf{u}^{-1} = 1$ et $\mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1}\mathsf{uv} = 1$), et un inversible est non nul. □

Ces deux derniers théorèmes sont non triviaux. Dans $M_2(\mathbf{R})$ il y a des matrices qui sont qui sont ni nulles ni inversibles, et parfois le produit de deux matrices non nulles est nulle. Par exemple, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ne sont ni nuls (de rang 0) ni inversibles (de rang maximal 2), et leur produit est nul : $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Théorème 12.10. *Soit* u, v *des quaternions. Alors on a* $\|\mathsf{uv}\| = \|\mathsf{u}\|\|\mathsf{v}\|$.

En particulier pour $r \in \mathbf{R}$ et $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ on a $\|r\mathsf{u}\| = |r|\|\mathsf{u}\|$.

Preuve. On a

$$\|\mathsf{uv}\|^2 = \mathsf{uv}\overline{\mathsf{uv}} = \mathsf{uv}\overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}} = \mathsf{u}\|\mathsf{v}\|^2\overline{\mathsf{u}}.$$

Comme $\|\mathsf{v}\|^2$ est un réel, il commute avec tous les quaternions. D'où on a

$$\|\mathsf{uv}\|^2 = \mathsf{u}\overline{\mathsf{u}}\|\mathsf{v}\|^2 = \|\mathsf{u}\|^2\|\mathsf{v}\|^2 = \big(\|\mathsf{u}\|\|\mathsf{v}\|\big)^2.$$

En prenant les racines carrées de ces réels, on trouve $\|\mathsf{uv}\| = \|\mathsf{u}\|\|\mathsf{v}\|$. □

Les matrices de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ se retrouvent dans la manière suivante. On identifie les nombres complexes aux quaternions de la forme $a + bi = a + bi + 0j + 0k$. On munit $\mathbf{H}$ d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel en utilisant la multiplication à droite par les membres de $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ (z, \mathsf{u}) & \longmapsto & \mathsf{u}z. \end{array}$$

Comme chaque quaternion a une unique écriture sous la forme

$$\mathsf{u} = a + bi + cj + dk = 1(a + bi) + j(c - di) = 1z + j\overline{w},$$

avec $z = a + bi$ et $\overline{w} = c - di$ dans $\mathbf{C}$, on voit que $\{1, j\}$ est une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{H}$. Chaque quaternion a aussi une unique écriture sous la forme

$$\mathsf{u} = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j = z + wj.$$

Noter qu'on a $wj = j\overline{w}$ pour tout $w \in \mathbf{C}$.

Maintenant pour chaque $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ on a une application

$$\begin{array}{cccc} \phi_{\mathsf{u}}\colon & \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ & \mathsf{a} & \longmapsto & \mathsf{ua}. \end{array}$$

Cette application est $\mathbf{C}$-linéaire parce qu'elle vérifie

$$\phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a} + \mathsf{b}) = \mathsf{u}(\mathsf{a} + \mathsf{b}) = \mathsf{ua} + \mathsf{ub} = \phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a}) + \phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{b}),$$
$$\phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a}z) = \mathsf{u}(\mathsf{a}z) = (\mathsf{ua})z = \phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a})z.$$

La multiplication à gauche par des éléments de $\mathbf{H}$ commute avec la multiplication à droite par les éléments de $\mathbf{C}$. Pour $\mathsf{u} = z + wj$ avec $z, w \in \mathbf{C}$, l'action de ϕ_{u} sur la base $\{1, j\}$ est donnée par

$$\phi_{\mathsf{u}}(1) = (z + wj)1 = z + wj = 1z + j\overline{w},$$
$$\phi_{\mathsf{u}}(j) = (z + wj)j = -w + zj = 1(-w) + j\overline{z}.$$

Donc la matrice de ϕ_{u} dans la $\mathbf{C}$-base $\{1, j\}$ de $\mathbf{H}$ est

$$\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}.$$

13. Les quaternions et les rotations

On identifie l'ensemble $\mathbf{H}^{\text{pur}}$ de quaternions purs à l'espace $\mathbf{R}^3$ en identifiant le quaternion pur $\mathsf{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ au vecteur $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

Proposition 13.1. *Soit* $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$ *des quaternions purs, et* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ *les vecteurs de* $\mathbf{R}^3$ *correspondants. Alors on a* $\Re\mathrm{e}(\mathsf{xy}) = -\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}$*, et* $\Im\mathrm{m}(\mathsf{xy})$ *est le quaternion pur correspondant au vecteur* $\vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{y}}$*.*

C'est la formule (12.4) avec les substitutions $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$ correspondant aux quaternions purs.

Corollaire 13.2. *Soit* x *un quaternion pur, correspondant à* $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3$*. Alors* $\mathsf{x}^2 = -\|\vec{\mathbf{x}}\|^2$ *est un quaternion réel négatif, et c'est* < 0 *pour* $\mathsf{x} \neq \mathsf{0}$*.*

Preuve. Par la proposition on a $\Re\mathrm{e}(\mathsf{x}^2) = -\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = -\|\vec{\mathbf{x}}\|^2$, tandis que $\Im\mathrm{m}(\mathsf{x}^2)$ est le quaternion pur correspondant à $\vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. □

Théorème 13.3. *Soit* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}$ *des vecteurs de* $\mathbf{R}^3$*, et soit* $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$ *les quaternions purs correspondants. Alors* $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ *est une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$ *si et seulement si* $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ *satisfont à*

$$\mathsf{x}^2 = \mathsf{y}^2 = \mathsf{z}^2 = -1, \qquad \mathsf{xy} = -\mathsf{yx} = \mathsf{z}, \qquad \mathsf{yz} = -\mathsf{zy} = \mathsf{x}, \qquad \mathsf{zx} = -\mathsf{xz} = \mathsf{y}. \tag{13.1}$$

Ce sont les mêmes formules que pour les quaternions i, j, k dans (11.6) et (12.3).

Preuve. ($\Leftarrow$) Si $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ vérifient les formules, alors par la proposition 13.1 ou le corollaire (13.2) on déduit de $\mathsf{x}^2 = \mathsf{y}^2 = \mathsf{z}^2 = -1$ qu'on a $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{z}} = 1$ et donc $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$. Notez que $\mathsf{xy} = \mathsf{z}$ est pur. Donc on a $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = -\Re\mathrm{e}(\mathsf{xy}) = -\Re\mathrm{e}(\mathsf{z}) = 0$. Similairement $\mathsf{xz} = -\mathsf{y}$ et $\mathsf{yz} = \mathsf{x}$ sont purs, et on a donc $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{z}} = 0$ et $\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}} = 0$. Finalement on a $\mathsf{z} = \Im\mathrm{m}(\mathsf{z}) = \Im\mathrm{m}(\mathsf{xy})$. Donc par la proposition on a $\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{y}}$. Donc $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.

($\Rightarrow$) Si $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$, alors on a $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$, et le corollaire implique qu'on a $\mathsf{x}^2 = \mathsf{y}^2 = \mathsf{z}^2 = -1$. La proposition nous donne $\Re\mathrm{e}(\mathsf{xy}) = -\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = 0$, et comme on et $\vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}}$, on a $\Im\mathrm{m}(\mathsf{xy}) = \mathsf{z}$. Donc on a $\mathsf{xy} = 0 + \mathsf{z} = \mathsf{z}$. Similairement $\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0$ et $\vec{\mathbf{y}} \wedge \vec{\mathbf{x}} = -\vec{\mathbf{z}}$ donnent $\mathsf{yx} = -\mathsf{z}$. Etc. □

Définition 13.4. Une quaternion $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ est *unitaire* s'il satisfait à $\|\mathsf{u}\| = 1$. On écrit

$$\mathbf{U} = \{\mathsf{u} \in \mathbf{H} \mid \|\mathsf{u}\| = 1\}.$$

pour l'ensemble des quaternions unitaires.

Proposition 13.5. (*a*) *Pour* $\mathsf{u} \in \mathbf{U}$ *on a* $\mathsf{u}^{-1} = \overline{\mathsf{u}} \in \mathbf{U}$*.*
(*b*) *Pour* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{U}$ *on a* $\mathsf{uv} \in \mathbf{U}$*.*
(*c*) *Les quaternions réels dans* $\mathbf{U}$ *sont* 1 *et* -1*.*

Preuve. Les parties (a) et (b) sont des conséquences des propriétés de la norme développée dans la section précédente. Et si $a \in \mathbf{U}$ est réel, alors $\|a\|^2 = a\overline{a} = a^2 = 1$, et donc $a = \pm 1$. □

Soit maintenant x un quaternion pur avec $\|\mathsf{x}\| = 1$. Par le corollaire 13.2 on a $\mathsf{x}^2 = -1$. Par conséquent la multiplication de quaternions de la forme $a + b\mathsf{x}$ (avec $a, b \in \mathbf{R}$) vérifie la même formule que la multiplication dans $\mathbf{C}$

$$(a + b\mathsf{x})(c + d\mathsf{x}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathsf{x}.$$

avec x remplaçant $i \in \mathbf{C}$. Pour la conjugaison on a $\overline{a+b\mathsf{x}} = a - b\mathsf{x}$, encore comme les nombres complexes. Il s'ensuit que pour les quaternions de la forme

$$e^{\theta\mathsf{x}} = \cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x},$$

avec θ réel on a les formules familières

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})(\cos\theta - \sin\theta\,\mathsf{x}) &= \|\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x}\|^2 = 1,\\ (\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})(\cos\phi + \sin\phi\,\mathsf{x}) &= \cos(\theta+\phi) + \sin(\theta+\phi)\mathsf{x}.\end{aligned} \tag{13.2}$$

Théorème 13.6. *Soit $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1$ et soit $\theta \in \mathbf{R}$. Soit $\mathsf{x} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ le quaternion pur correspondant, et considérons le quaternion unitaire*

$$\mathsf{u} = e^{\frac{\theta}{2}\mathsf{x}} = \cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}. \tag{13.3}$$

Alors quand on identifie $\mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ à $\mathbf{R}^3$ dans la façon usuelle (en identifiant $xi + yj + zk \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ à $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$), alors l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} R_{\mathsf{u}}\colon & \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} & \longrightarrow & \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} \\ & \mathsf{h} & \longmapsto & \mathsf{u}\mathsf{h}\overline{\mathsf{u}} \end{array} \tag{13.4}$$

est la rotation $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{x}},\theta}$ d'angle θ autour de l'axe engendré par $\vec{\mathbf{x}}$.

Preuve. Complétons $\vec{\mathbf{x}}$ en une base orthonormée directe $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ de $\mathbf{R}^3$. Alors les quaternions associés $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ vérifient (13.1). Comme x commute avec toute combinaison linéaire de 1 et x on a

$$R_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{x}(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{x} = \mathsf{x}.$$

Mais on a $\mathsf{x}\mathsf{y} = -\mathsf{y}\mathsf{x}$, d'où

$$\begin{aligned} R_{\mathsf{u}}(\mathsf{y}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{y}(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}) &= (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})(\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{y}\\ &= (\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})\mathsf{y} = \cos\theta\,\mathsf{y} + \sin\theta\,\mathsf{z}.\end{aligned}$$

Similairement on a

$$\begin{aligned} R_{\mathsf{u}}(\mathsf{z}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{z}(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}) &= (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})(\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{z}\\ &= (\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})\mathsf{z} = -\sin\theta\,\mathsf{y} + \cos\theta\,\mathsf{z}.\end{aligned}$$

Quand on identifie les quaternions purs aux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ on trouve les équations (5.3) de la rotation d'angle θ autour de l'axe x. Donc R_{u} est la rotation linéaire d'axe $\vec{\mathbf{x}}$ et d'angle θ. □

Théorème 13.7. *La rotation $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ induite par un quaternion unitaire $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk \in \mathbf{U}$ avec $\mathsf{u} \neq \pm 1$ est la rotation d'angle θ autour de l'axe engendré par $\vec{\mathbf{x}}$ pour*

$$\theta = 2\arccos a, \qquad \vec{\mathbf{x}} = \tfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(b, c, d). \tag{13.5}$$

Preuve. Pour $\mathsf{u} \neq 1$, ce sont des valeurs de θ et $\vec{\mathbf{x}}$ qui donnent $\cos\frac{\theta}{2} = a$ et $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{b^2+c^2+d^2}$ et $\|\mathsf{x}\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(bi + cj + dk)\right\| = 1$ et donc

$$\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x} = a + bi + cj + dk.$$

Quand $\mathsf{u} = \pm 1$ on a bien $\mathsf{u}\mathsf{h}\overline{\mathsf{u}} = \mathsf{h}$ pour tout $\mathsf{h} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$. □

Par exemple pour $\mathsf{u}_1 = i$ on a

$$\mathsf{u}_1 = i = 0 + i = \cos\tfrac{\pi}{2} + \sin\tfrac{\pi}{2}\, i,$$

donc c'est $\theta_1 = \pi$ et $\mathsf{x}_1 = i$. Donc l'application $R_i \colon \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} \to \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ envoyant

$$xi + yj + zk \mapsto i(xi + yj + zk)\bar{i} = i(xi + yj + zk)(-i) = i(x + yk - zj) = xi - yj - zk$$

correspond à l'application $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ envoyant $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$. Et c'est la rotation d'angle π autour de l'axe engendré par $(1, 0, 0)$.

Pour $\mathsf{u}_2 = j$ on a

$$\mathsf{u}_2 = j = 0 + j = \cos\tfrac{\pi}{2} + \sin\tfrac{\pi}{2}\, j,$$

donc c'est $\theta_2 = \pi$ et $\mathsf{x}_2 = j$.

Pour $\mathsf{u}_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$ on a

$$\mathsf{u}_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) = \cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\tfrac{\pi}{3}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k).$$

Donc c'est $\theta_3 = \frac{2\pi}{3}$ et $\mathsf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.

Lemme 13.8. *Soit $\mathsf{x} \in \mathbf{H}$ un quaternion qui commute avec tout $\mathsf{z} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$. Alors x est réel.*

Preuve. Si $\mathsf{x} = a + bi + cj + dk$ commute avec tous les quaternions purs, alors on a $\mathsf{x}i = i\mathsf{x}$ et $\mathsf{x}j = j\mathsf{x}$. En substituant et développant cela donne

$$ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj, \qquad aj + bk - c - di = aj - bk - c + di.$$

En simplifiant, cela donne $2dj - 2ck = 0$ et $-2di + 2bk = 0$. Donc on a $b = c = d = 0$, et par conséquent $\mathsf{x} = a$ est réel. □

Théorème 13.9. *Soit $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{U}$ des quaternions unitaires, et $R_{\mathsf{u}}, R_{\mathsf{v}}$ les rotations associées de* (13.4).

(*a*) *On a $R_{\mathsf{u}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pur}}}$ ssi on a $\mathsf{u} = \pm 1$.*
(*b*) *On a $R_{\mathsf{u}} \circ R_{\mathsf{v}} = R_{\mathsf{uv}}$ et $R_{\mathsf{u}}^{-1} = R_{\bar{\mathsf{u}}}$.*
(*c*) *On a $R_{\mathsf{u}} = R_{\mathsf{v}}$ ssi on a $\mathsf{u} = \pm\mathsf{v}$.*

Preuve. (a) Clairement pour $\mathsf{u} = \pm 1$ on a $\mathsf{u}\mathsf{x}\bar{\mathsf{u}} = \mathsf{x}$. Réciproquement si on a $R_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) = \mathsf{u}\mathsf{x}\bar{\mathsf{u}} = \mathsf{x}$ pour tout $\mathsf{x} \in \mathbf{H}$, alors on a $\mathsf{u}\mathsf{x} = \mathsf{u}\mathsf{x}\bar{\mathsf{u}}\mathsf{u} = \mathsf{x}\mathsf{u}$ pour tout x. Alors par le lemme u est réel, et donc par la proposition 13.5 on a $\mathsf{u} = \pm 1$.

(b) On a

$$R_{\mathsf{u}}(R_{\mathsf{v}}(\mathsf{x})) = \mathsf{u}(\mathsf{v}\mathsf{x}\bar{\mathsf{v}})\bar{\mathsf{u}} = \mathsf{u}\mathsf{v}\mathsf{x}\bar{\mathsf{v}}\bar{\mathsf{u}} = (\mathsf{u}\mathsf{v})\mathsf{x}\overline{\mathsf{u}\mathsf{v}} = R_{\mathsf{uv}}(\mathsf{x}).$$

Par conséquent $R_{\bar{\mathsf{u}}} \circ R_{\mathsf{u}} = R_{\bar{\mathsf{u}}\mathsf{u}} = R_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}}$. Donc on a $R_{\mathsf{u}}^{-1} = R_{\bar{\mathsf{u}}}$.

(c) On a $R_{\mathsf{u}} = R_{\mathsf{v}}$ ssi on a $\mathrm{Id}_{\mathbf{H}} = R_{\mathsf{u}} \circ R_{\mathsf{v}}^{-1} = R_{\mathsf{u}} \circ R_{\bar{\mathsf{v}}} = R_{\mathsf{u}\bar{\mathsf{v}}}$ ssi on a $\mathsf{u}\bar{\mathsf{v}} = \pm 1$ ssi on a $\mathsf{u} = \mathsf{u}\bar{\mathsf{v}}\mathsf{v} = \pm\mathsf{v}$. □

Exemple 13.10. Qu'est qu'est la composition de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $(0, 0, 1)$ après la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$?

C'est $R_{\mathsf{u}} \circ R_{\mathsf{v}} = R_{\mathsf{uv}}$ avec

$$\mathsf{u} = \cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{\pi}{4}\, k = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + k),$$

$$\mathsf{v} = \cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\tfrac{\pi}{3}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) = \tfrac{1}{2}(1 + i + j + k).$$

Le produit des deux quaternions unitaires est

$$\begin{aligned}\mathsf{uv} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+k)\tfrac{1}{2}(1+i+j+k) = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+k)(1+i+j+k)\\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+i+j+k)+(k+j-i-1)) = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(2j+2k) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(j+k).\end{aligned}$$

Vu qu'on a $\Re\mathrm{e}(\mathsf{uv}) = 0$, l'angle θ de la rotation composée vérifie $\cos\frac{\theta}{2} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ et donc $\theta = \pi$. L'axe de la rotation composée est engendré par $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

Exemple 13.11. Qu'est qu'est la composition de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $(1,0,0)$ après la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ autour de $(0,1,0)$?

C'est $R_{\mathsf{u}} \circ R_{\mathsf{v}} = R_{\mathsf{uv}}$ avec

$$\begin{aligned}\mathsf{u} &= \cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{\pi}{4}\, i = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\\ \mathsf{v} &= \cos\tfrac{2\pi}{3} + \sin\tfrac{2\pi}{3}\, j = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{1}{\sqrt{3}} j = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\, j).\end{aligned}$$

Le produit des deux quaternions unitaires est

$$\begin{aligned}\mathsf{uv} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\, j) = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)(-1+\sqrt{3}\, j)\\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}((-1+\sqrt{3}\, j)+(-i+\sqrt{3}\, k) = -\tfrac{1}{\sqrt{8}} + \tfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\tfrac{1}{\sqrt{7}}(-i+\sqrt{3}\, j+\sqrt{3}\, k).\end{aligned}$$

Donc la rotation composée est d'angle $\theta = 2\arccos(-\frac{1}{\sqrt{8}})$ autour de l'axe engendré par le vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{7}}(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Les quaternions nous permettent de calculer l'angle et l'axe d'une rotation qui est la composition de deux autres rotations en toute généralité.

Théorème 13.12. *Soit* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^3$ *de norme* 1*, et soit* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$*. Si* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta} \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$*, alors* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{c}},\gamma}$ *avec* $0 < \gamma < 2\pi$ *vérifiant*

$$\cos\tfrac{\gamma}{2} = \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} - \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})$$

et avec $\vec{\mathbf{c}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}\vec{\mathbf{v}}$ *pour*

$$\vec{\mathbf{v}} = \cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\vec{\mathbf{b}} + \cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{\mathbf{a}} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}.$$

Preuve. Ecrivons $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$. Alors les quaternions unitaires a, b correspondant aux rotations $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha}$, $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta}$ sont

$$\begin{aligned}\mathsf{a} &= \cos\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\mathsf{a}_0,\\ \mathsf{b} &= \cos\tfrac{\beta}{2} + \sin\tfrac{\beta}{2}\,\mathsf{b}_0,\end{aligned}$$

avec $\mathsf{a}_0 = a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ le quaternion pur correspondant au vecteur $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^3$, et $\mathsf{b}_0 = b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ le quaternion pur correspondant au vecteur $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^3$.

Le quaternion unitaire correspondant à la composition $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{c}},\gamma}$ est le produit ab. Sa partie réelle est la somme du produit des parties réelles plus la partie réelle du produit des parties pures

$$\cos\tfrac{\gamma}{2} = \Re\mathrm{e}(\mathsf{ab}) = \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\Re\mathrm{e}(\mathsf{a}_0\mathsf{b}_0).$$

Par la proposition 13.1 on a $\Re\mathrm{e}(\mathsf{a}_0\mathsf{b}_0) = -\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}$. Donc on a bien

$$\cos\tfrac{\gamma}{2} = \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} - \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}).$$

Si on a bien $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta} \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$, alors le produit des quaternions unitaires vérifie $\mathsf{ab} \neq \pm 1$, et sa partie pure est non nulle. Cette partie pure peut s'écrire

$$\Im\mathrm{m}(\mathsf{ab}) = v_1 i + v_2 j + v_3 k = \sin\tfrac{\gamma}{2}\,(c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$

avec $\sin\frac{\gamma}{2} > 0$ et $\vec{\mathbf{c}} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{R}^3$ unitaire. Or cette partie pure est la somme de trois termes : deux termes qui sont la partie réelle d'un quaternion multipliée par la partie pure de l'autre, plus la partie pure du produit des parties pures

$$v_1 i + v_2 j + v_3 k = \cos\tfrac{\alpha}{2}(\sin\tfrac{\beta}{2}\,\mathsf{b}_0) + (\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\mathsf{a}_0)\cos\tfrac{\beta}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\Im\mathrm{m}(\mathsf{a}_0\mathsf{b}_0).$$

Par la proposition 13.1 ce quaternion pur correspond au vecteur suivant de $\mathbf{R}^3$

$$\vec{\mathbf{v}} = \cos\tfrac{\alpha}{2}(\sin\tfrac{\beta}{2}\,\vec{\mathbf{b}}) + (\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{\mathbf{a}})\cos\tfrac{\beta}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}. \qquad \square$$

14. La matrice d'une rotation associée à un quaternion

Le calcul de compositions de rotations est plus efficace en utilisant les quaternions que les matrices. En revanche, pour calculer l'action de la rotation associée à un quaternion unitaire a sur un vecteur, il est mieux de d'abord calculer la matrice de la rotation, et ensuite on multiplie la matrice par le vecteur colonne. La formule est la suivante.

Théorème 14.1. *Soit* $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$ *avec* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. *Alors la matrice de la rotation de* $\mathbf{R}^3$ *associée à* u *est*

$$M_{\mathsf{u}} = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & -2ad+2bc & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & a^2-b^2+c^2-d^2 & -2ab+2cd \\ -2ac+2bd & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}. \tag{14.1}$$

Preuve. La matrice M_{u} est la matrice de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} R_{\mathsf{u}}\colon & \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} & \longrightarrow & \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} \\ & \mathsf{h} & \longmapsto & \mathsf{u}\mathsf{h}\overline{\mathsf{u}} \end{array}$$

de (13.4) dans la base i, j, k de $\mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$. Pour les coefficients de sa première colonne on calcule

$$\begin{aligned} R_{\mathsf{u}}(i) = \mathsf{u}i\overline{\mathsf{u}} &= (a+bi+cj+dk)i(a-bi-cj-dk) = (a+bi+cj+dk)(b+ai+dj-ck) \\ &= (ab-ba-cd+dc) + (a^2+b^2-c^2-d^2)i + (ad+bc+cb+ad)j + (-ac+bd-ca+db)k \\ &= (a^2+b^2-c^2-d^2)i + (2ad+2bc)j + (-2ac+2bd)k. \end{aligned}$$

en utilisant la formule (12.4). Similairement les coefficients de la deuxième colonne s'obtiennent d'un calcul

$$R_{\mathsf{u}}(j) = \mathsf{u}j\overline{\mathsf{u}} = (-2ad+2bd)i + (a^2-b^2+c^2-d^2)j + (2ab+2cd)k,$$

et ceux de la troisième colonne du calcul

$$R_{\mathsf{u}}(k) = \mathsf{u}k\overline{\mathsf{u}} = (2ac+2bd)i + (-2ab+2cd)j + (a^2-b^2-c^2+d^2)k. \qquad \square$$

La matrice M_{u} a une décomposition en somme de trois termes comme dans la formule de Rodrigues.

$$M_{\mathsf{u}} = (2a^2-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b^2 & bc & bd \\ bc & c^2 & cd \\ bd & cd & d^2 \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} 0 & -d & c \\ d & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(Noter qu'on a $2a^2 - 1 = 2a^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2) = a^2-b^2-c^2-d^2$.)

15. Quaternions contre matrices

Les informaticiens, numériciens et ingénieurs préfèrent souvent de programmer les rotations de $\mathbf{R}^3$ en les représentant par des quaternions unitaires $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ avec $\|\mathsf{u}\| = 1$ plutôt que par des matrices orthogonales spéciales $A \in M_3(\mathbf{R})$ avec ${}^tAA = I_3$ et $\det A = 1$. Voici quelques raisons :

- La représentation par les quaternions est ***plus compacte***. Le quaternion unitaire a 4 coefficients (a, b, c, d) assujetis à 1 condition simple $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. La matrice $A \in SO(3, \mathbf{R})$ a 9 coefficients $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$ assujetis à 6 conditions plus complexes.
- ***L'axe et l'angle*** de la rotation sont plus visibles dans le quaternion. L'angle se déduit immédiatement de la partie réelle du quaternion, et l'axe est essentiellement la partie pure (éventuellement normalisée). Pour la matrice A, il faut résoudre un système linéaire pour trouver l'axe, et c'est un peu subtile de distinguer entre les angles θ et $-\theta$.
- ***La composition de rotations*** est plus rapide avec les quaternions (16 multiplications) qu'avec les matrices (27 multiplications).
- En revanche ***l'action de la rotation sur des vecteurs*** de $\mathbf{R}^3$ est plus rapide à calculer avec les matrices (9 multiplications) qu'avec les quaternions (19 multiplications, dont 10 pour obtenir la matrice de la rotation, et 9 pour le produit de la matrice et du vecteur).
- ***La stabilité numérique***. Il est souvent dit que la raison la plus importante pour préférer les quaternions aux matrices est la plus grande stabilité numérique des calculs avec les quaternions.

  Les calculs d'un processeur numérique utilisent les nombres **réels flottants** de l'informatique et pas les nombres réels théoriques des mathématiciens. Les calculs avec les réels flottants sont assujetis à ce qu'on appelle parfois des "erreurs d'arrondi". Si on a deux quaternions u et v de norme 1, il est possible que le produit "rapproché" $\mathsf{w} \approx \mathsf{uv}$ calculé par le processeur numérique soit de norme proche de 1 mais pas exactement 1. Si on veut éviter des dérives dans l'application, il faut corriger ce problème en remplaçant w par le quaternion de norme 1 le plus proche de w, qui est $\frac{1}{\|\mathsf{w}\|}\mathsf{w}$. C'est simple.

  Similairement, si on a deux matrices de rotations $A, B \in SO(3, \mathbf{R})$, le calcul fait par un processeur numérique peut être un produit "rapproché" de matrices $C \approx AB$ avec ${}^tCC$ proche de I_3 mais pas égal à I_3. Si on veut éviter des dérives dans l'application, il faut corriger ce C et le remplacer par une matrice de rotation aussi proche de C que possible. Ce n'est pas aussi simple à faire qu'avec les quaternions.
- D'autres ***algorithmes plus simples et/ou plus performants*** : l'interpolation, ...

Appendice : l'alphabet grec

Alpha	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Bêta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ
Zêta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Êta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Thêta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omêga	Ω	ω